

# 边界元法分析中的边界切向应力 差分算法

潘升材 朱如鹏  
(南京航空学院)

## 摘 要

在用边界元法作弹性应力分析中,不能直接计算出弹性体边界切向应力。本文在边界元法分析的基础上,用差分法计算边界切向应力。推导出常边界单元情况下边界切向应力的差分公式。计算表明文中所述方法是可行的,并且简单实用。所研究的方法和公式也适用于高次边界单元的边界切向应力的计算。

**关键词:** 边界切向应力, 差分法, 边界元法

## 一、引 言

对于一平面弹性体  $\Omega$  的边界  $\Gamma$  上某一点  $P$  (见图 1), 在边界表面上有沿边界法向  $n$  的应力  $\sigma_n$  和沿表面切向  $t$  的剪切应力  $\tau_{nt}$ , 而体内边界处沿边界切向的应力  $\sigma_t$  就是本文要讨论的边界切向应力。

边界切向应力  $\sigma_t$  在工程设计和试验研究中有比较大的意义。如许多零构件往往边界切向应力最大, 对其强度有较大影响; 零件表面的裂纹形成和扩展与边界切向应力有很大关系。

众所周知, 在用边界元法作弹性应力分析时, 可以直接算出边界表面上和体内的位移及应力等, 而  $\sigma_t$  是不能直接算出的。有必要另寻方法计算出  $\sigma_t$ 。有关边界元法的文献 (如文献[1]、[2]) 中都没有对边界切向应力的计算做出切实的讨论。本文在边界元分析的基础上, 对常单元情况下用差分法求  $\sigma_t$  做出了讨论。文中的方法和公式也可适用于高次单元的情况。

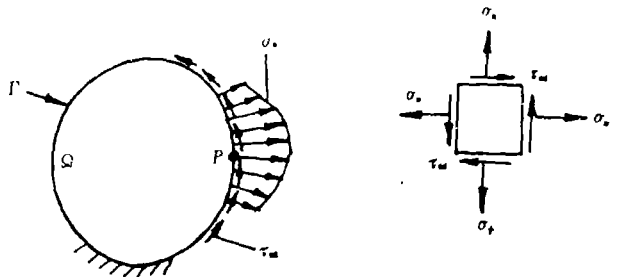


图 1 边界切向应力  $\sigma_t$

## 一、基本公式

### 1. 计算边界切向应力的公式

用边界元法解除弹性体边界上各节点的未知参数(作用力或位移)后,根据所采用的形式,由相应的形函数和节点参数值求出每个单元上的作用力和位移的分布,这样,可求出边界切向应变  $\varepsilon_t$ , 则计算  $\sigma_t$  的公式为:

$$\sigma_t = (\mu\sigma_n + 2G\varepsilon_t) / (1 - \mu) \quad (1)$$

式中:  $G$  和  $\mu$  是弹性体的剪切模量和泊桑比比;  $\sigma_n$  是边界表面上的法向应力(见图1)。

对于除常用单元以外的其他较高次单元,单元上的位移由相应的形函数与节点位移来表示,其值在单元上不是常数,可用求导数的方法计算出  $\varepsilon_t$ , 但对于常单元就不能采用这种做法,因为常单元上的位移是常数,等于节点处的值,用求导的方法求  $\varepsilon_t$  是不行的,对于常单元,为了求出某个单元上的切向应变,可以把与该单元相邻的单元联系起来,用差分法进行计算。

### 2. 边界切向应变 $\varepsilon_t$ 的差分公式

函数  $f(x)$  对  $x$  的微分  $df(x)/dx$  的差分表示有算三种形式,即

$$df(x)/dx \approx \begin{cases} [(f(x+\Delta x) - f(x))/\Delta x] & \text{(向前差分)} \\ [f(x) - f(x-\Delta x)]/\Delta x & \text{(向后差分)} \\ [f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)]/2\Delta x & \text{(中心差分)} \end{cases}$$

下面讨论常边界单元  $\varepsilon_t$  的差分计算,推导出与上述三种差分形式相对应的公式。

设所考察的是弹性边界上第  $i$  个单元,其相邻的单元是  $i-1$  和  $i+1$ , 它们的位移向量和单元长度分别为  $\vec{u}^k$  和  $a^k$  ( $k=i-1, i, i+1$ ); 各单元的法向  $n$  和切向  $t$  作为单元的边界局部坐标系( $n, t$ ); 其中

$$\vec{u}^k = \begin{bmatrix} u_x^k \\ u_y^k \end{bmatrix}$$

$u_x^k$  和  $u_y^k$  分别为  $k$  单元节点沿整体坐标系  $x$  和  $y$  的位移分量,其值由边界单元法分析得出。

(1) 直线边界: 这时各单元的切向相同,见图2。设边界与  $x$  轴的夹角为  $\varphi$ , 则位移向量在单元局部坐标系的表示为:

$$\vec{u}^k = \Phi \vec{u}^k \quad (k=i-1, i, i+1)$$

式中:  $\vec{u}^k = \begin{bmatrix} u_n^k \\ u_t^k \end{bmatrix}$ ,  $u_n^k$  和  $u_t^k$  分别是  $k$  单元节点的法向和切向位移分量;

$\Phi = \begin{bmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}$ , 是整体坐标系与边界局部坐标系间的转换矩阵。则单元  $i$  的边界切向应变  $\varepsilon_t^i$  有如下的差分公式:

$$\varepsilon_t^i = \frac{A u_t^{i+1} + B u_t^i + C u_t^{i-1}}{D a^{i+1} + E a^i + F a^{i-1}} \quad (2)$$

式中:  $A, B, C, D, E$  和  $F$  为差分形式因子(下同),其值见表1

表 1 差分形式因子的取值

差分形式 \ 因子 数值	因子					
	A	B	C	D	E	F
向前差分	1	-1	0	1/2	1/2	0
向后差分	0	1	-1	0	1/2	1/2
中心差分	1	0	-1	1/2	1	1/2

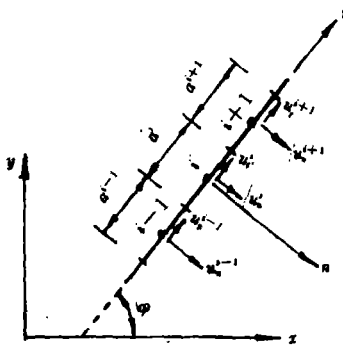


图 2 直线边界

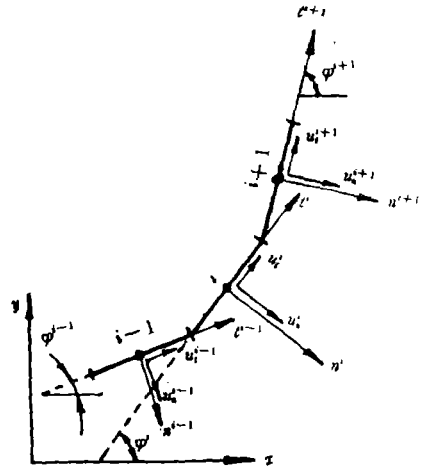


图 3 曲线边界

(2) 曲线边界: 这时各单元的切线方向互不相同, 见图 3。设各单元的切向与  $x$  轴的夹角为  $\Phi^k(k=i-1, i, i+1)$ , 则各单元位移向量在边界局部坐标系中的表示为:

$$\vec{u}^k = \Phi^k \vec{u}^k \quad (k=i-1, i, i+1)$$

式中:  $\Phi^k = \begin{bmatrix} \sin\phi^k & -\cos\phi^k \\ \cos\phi^k & \sin\phi^k \end{bmatrix}$  为各单元边界局部坐标系与整体坐标系间的转换矩阵。

由于各单元的切向不相同, 不能象直线边界那样采用单元切向位移直接计算  $\epsilon_i^l$ , 为了求出单元  $i$  的切向应变  $\epsilon_i^l$ , 要把相邻单元  $i-1$  和  $i+1$  的有关量转换到单元  $i$  的切向。设单元切线方向的单位矢量为  $\vec{t}_i$ , 则

$$\vec{t}_i^k = \begin{bmatrix} \cos\phi^k \\ \sin\phi^k \end{bmatrix} \quad (k=i-1, i, i+1)$$

在单元  $i$  的切线方向上, 单元  $i-1$  和  $i+1$  的位移  $u_{i-1}^{i-1}$  和  $u_{i+1}^{i+1}$  为:

$$u_i^m = (\vec{u}^m)^T \vec{t}_i^m \quad (m=i-1, i+1)$$

则单元  $i$  的边界切向应变  $\epsilon_i^l$  为:

$$\varepsilon_i^i = \frac{Au_i^{i+1} + Bu_i^i + Cu_i^{i-1}}{Da^{i+1}(t^{i+1}t^i + Ea^i + Fa^{i-1}(t^{i-1})^T t^i)} \quad (3)$$

在上述中，符号  $( )^T$  表示对括号内的向量作转置。将 (2) 或 (3) 代入 (1) 即可求出  $i$  单元的  $\sigma_i^i$ 。

### 二、算例与讨论

作者已在边界元法作弹性应力分析中引用了上述方法，并研制出相应的计算机程序。计算表明上述方法及其公式是正确的。这里给出一个关于厚壁圆筒受内压的算例。圆筒的几何尺寸见图 4 (a) 所示，

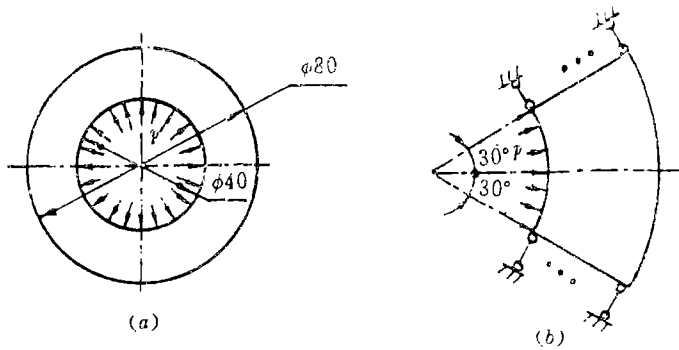


图 4

材料的弹性模量  $E = 115000N/mm^2$ ，泊桑比  $\mu = 0.3$ ，内压  $P = 10N/mm^2$ 。利用轴对称的特点，取圆心角为  $60^\circ$  的一扇形块进行分析，见图 4 (b)。采用了两种方式划分边界单元。

图 5 给出了计算模型的边界切向应力的理论解和数值解。从图中可见，在应力变化较小的边界处数值解与理论解极其相近，而在应力变化较大的边界处数值解与理论解有一定的误差，这种误差可以通过细划单元得到减小。在本算例中，径向直线边界与内壁相近处应力梯度大，该处单元应仔细划分，否则会出现较大误差。

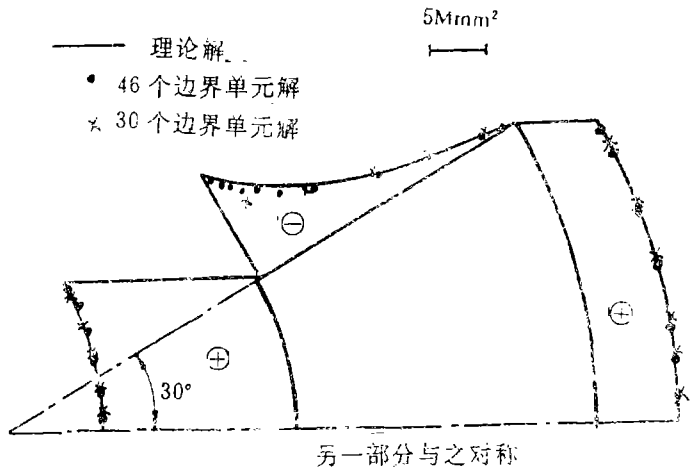


图 5

### 三、结 论

在边界元法分析的基础上，采用差分法计算边界切向应力，完善了边界元法的弹性应力分析，而且作法简单、实用。为了使计算具有足够的精度，必须适当划分边界单元，在应力梯度较大的地方要仔细划分单元。在求高次单元节点的边界切向应力时，也可采用本文所述方法和公式。

## 参 考 文 献

1. Brebbia, C.A. : The Boundary Element Method for Engineers, Prentech Press, London, Halstead Press, New York, 1978.
2. Brebbia, C.A. , Telles, J.C.F. , Wrobel, I.C. :  
Boundary Element Techniques Theory and Application in Engineering, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1984.

## DIFFERENCE METHOD FOR SOLVING THE TANGENTIAL STRESS AT THE BOUNDARY BY BEM

Pan Shengcai      Zhu Rupeng  
(*Nanjing Aeronautical Institute*)

## Abstract

The tangential stress at the boundary can not be gained directly in the application of BEM to analysing elastic stress. In this paper, difference method is used for solving tangential stress at the boundary on the basis of BEM. The difference equations for the boundary tangential stress are derived in the case of constant boundary element. The calculation show that the method in this article is feasible, and simple and practical. The method and equations developed also can be used to calculate the boundary tangential stress in the case of higher boundary element.

**Keywords:** Boundary tangential stress, Difference method, BEM.

### 《土力学与地基工程》一书即将出版

由史如平教授和韩选江副教授主编的《土力学与地基工程》一书由上海交通大学出版社于 90 年 8 月正式出版。该书根据国家标准《建筑地基基础设计规范》(GBJ7-89) 等新规范要求, 反映地基基础的一些新技术和新方法, 内容翔实, 简明易懂。全书共十三章, 40 万字, 可作为高等院校土建类专业必修教材, 并可供土建专业的设计, 施工和科研等有关工程技术人员参考, 欲购者可与各地新华书店或该出版社发行科联系。

(本刊记者: 杨永成)