

# 由响应识别桥上移动荷载\*

袁向荣

陈恩利

Tommy Hung- Tin Chan

(石家庄铁道学院, 石家庄 050043)

(香港理工大学, 香港九龙)

**提 要** 本文介绍一种基于欧拉梁振动理论由桥梁响应识别桥上移动时变荷载的方法, 用模态叠加法和最小二乘法由桥梁挠度或应变识别梁的模态位移, 采用差分方法得到梁的模态速度和模态加速度, 由梁的模态坐标方程和最小二乘法识别桥上移动荷载, 并通过计算机仿真说明测试误差、桥梁跨度及荷载间距对识别结果的影响。

**关键词** 移动荷载识别, 桥梁, 动力响应

## 一、引 言

车辆轴重是桥梁规划设计维护管理的重要参考数据。O Connor 和 Chan 采用等直简支梁挠曲线方程将桥梁的惯性和阻尼及桥上移动荷载均视为集中力, 建立桥梁多自由度动力方程, 采用数值方法识别通过桥梁的时变荷载<sup>[1]</sup>。这种方法的主要缺点是测试弯矩与识别荷载的时间步长不能同步, 另外梁的离散也会产生误差。袁向荣等<sup>[2]</sup>采用欧拉梁振动方程得出移动常荷载识别的精确方法, 本文在此基础上研究移动时变荷载的识别。

## 二、时变荷载通过时桥梁的响应

图 1 所示欧拉梁, 其振动微分方程为

$$\mu \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + D \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = \delta(x - ct)P \quad (1)$$

\* 本文收稿日期: 1996 年 10 月

边界条件及初始条件为

$$v(0, t) = 0 \quad v(L, t) = 0 \quad \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0$$

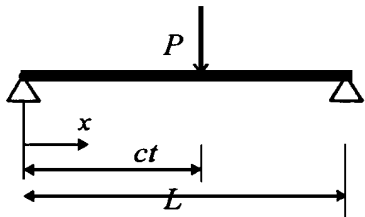


图 1

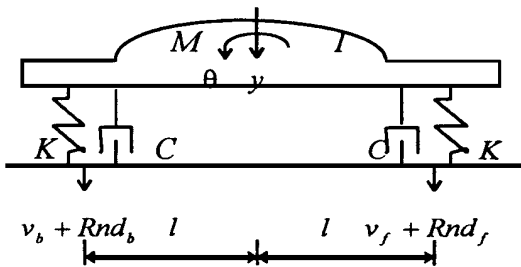


图 2

其中  $v(x, t)$ :  $x$  处时刻  $t$  的挠度,  $E$ : 弹性模量,  $I$ : 截面惯性矩,  $\mu$ : 单位长度质量,  $D$ : 阻尼系数,  $\delta$ : 狄拉克函数。

梁的固有频率、阻尼比及振型为

$$\omega_j^2 = \frac{j^4 \pi^4 EI}{L^4 \mu} \quad \zeta_j = \frac{D}{2\mu\omega_j} \quad \varphi_j = \sin^j \frac{\pi x}{L}$$

采用模态叠加法, 方程 (1) 的解为

$$v = \left[ \sin \frac{\pi x}{L} \quad \sin \frac{2\pi x}{L} \quad \dots \quad \sin \frac{n\pi x}{L} \right] [V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n]^T \quad (2)$$

其中  $V_j(t)$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ): 为模态坐标。将式 (2) 代入式 (1), 等式两边同乘以, 关于  $\sin^j \frac{\pi x}{L}$ ,  $x$  从 0 到  $L$  积分, 得

$$\ddot{V}_j(t) + 2\zeta_j \omega_j \dot{V}_j(t) + \omega_j^2 V_j(t) = \frac{2P}{\mu L} \sin^j \omega t \quad j = 1, 2, \dots \quad (3)$$

如果有  $k$  个荷载, 且第  $k$  个荷载到第一个荷载的距离为  $\hat{x}_k$ , ( $\hat{x}_1 = 0$ ), 则有

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} \ddot{V}_1 \\ \ddot{V}_2 \\ \vdots \\ \ddot{V}_n \end{matrix} + \begin{matrix} 2\zeta_1 \omega_1 \\ 2\zeta_2 \omega_2 \\ \vdots \\ 2\zeta_n \omega_n \end{matrix} \begin{matrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_n \end{matrix} + \begin{matrix} \omega_1^2 V_1 \\ \omega_2^2 V_2 \\ \vdots \\ \omega_n^2 V_n \end{matrix} \\ &= \frac{2}{\mu L} \begin{matrix} \sin \frac{\pi(ct - \hat{x}_1)}{L} & \sin \frac{\pi(ct - \hat{x}_2)}{L} & \dots & \sin \frac{\pi(ct - \hat{x}_k)}{L} & \dots & \sin \frac{\pi(ct - \hat{x}_n)}{L} \\ \sin \frac{2\pi(ct - \hat{x}_1)}{L} & \sin \frac{2\pi(ct - \hat{x}_2)}{L} & \dots & \sin \frac{2\pi(ct - \hat{x}_k)}{L} & \dots & \sin \frac{2\pi(ct - \hat{x}_n)}{L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin \frac{n\pi(ct - \hat{x}_1)}{L} & \sin \frac{n\pi(ct - \hat{x}_2)}{L} & \dots & \sin \frac{n\pi(ct - \hat{x}_k)}{L} & \dots & \sin \frac{n\pi(ct - \hat{x}_n)}{L} \end{matrix} \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_k \\ \vdots \end{matrix} \end{aligned} \quad (4)$$

由式(4)可求得  $V_j(j = 1, 2, \dots)$ 。解得  $V_j(j = 1, 2, \dots)$  后, 梁上  $x = x_1, \dots, x_l$  处挠度为

$$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_l \end{matrix} = \begin{matrix} \sin \frac{\pi x_1}{L} & \sin \frac{2\pi x_1}{L} & \dots & \sin \frac{n\pi x_1}{L} \\ \sin \frac{\pi x_2}{L} & \sin \frac{2\pi x_2}{L} & \dots & \sin \frac{n\pi x_2}{L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin \frac{\pi x_l}{L} & \sin \frac{2\pi x_l}{L} & \dots & \sin \frac{n\pi x_l}{L} \end{matrix} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_l \end{matrix} \quad (5)$$

相应的加速度为

$$\begin{matrix} \overset{\circ\circ}{v}_1 \\ \overset{\circ\circ}{v}_2 \\ \vdots \\ \overset{\circ\circ}{v}_l \end{matrix} = \begin{matrix} \sin \frac{\pi x_1}{L} & \sin \frac{2\pi x_1}{L} & \dots & \sin \frac{n\pi x_1}{L} \\ \sin \frac{\pi x_2}{L} & \sin \frac{2\pi x_2}{L} & \dots & \sin \frac{n\pi x_2}{L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin \frac{\pi x_l}{L} & \sin \frac{2\pi x_l}{L} & \dots & \sin \frac{n\pi x_l}{L} \end{matrix} \begin{matrix} \overset{\circ\circ}{V}_1 \\ \overset{\circ\circ}{V}_2 \\ \vdots \\ \overset{\circ\circ}{V}_n \end{matrix} \quad (6)$$

弯矩为( $M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ )

$$\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_l \end{matrix} = -EI \frac{\pi^2}{L^2} \begin{matrix} \sin \frac{\pi x_1}{L} & 2^2 \sin \frac{2\pi x_1}{L} & \dots & n^2 \sin \frac{n\pi x_1}{L} \\ \sin \frac{\pi x_2}{L} & 2^2 \sin \frac{2\pi x_2}{L} & \dots & n^2 \sin \frac{n\pi x_2}{L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin \frac{\pi x_l}{L} & 2^2 \sin \frac{2\pi x_l}{L} & \dots & n^2 \sin \frac{n\pi x_l}{L} \end{matrix} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_l \end{matrix} \quad (7)$$

### 三、车桥相互作用力

图 2 所示二自由度车辆模型的振动方程为

$$\begin{aligned} M\ddot{y} + 2C\dot{y} + 2Ky - C(\dot{v}_f + \dot{v}_b) - K(v_f + v_b) &= K(Rnd_f + Rnd_b) \\ I\ddot{\theta} + 2l^2C\dot{\theta} + 2l^2K\theta + Cl(\dot{v}_f + \dot{v}_b) + Kl(v_f - v_b) &= Kl(Rnd_b + Rnd_f) \end{aligned} \quad (8)$$

其中 Rnd 是桥面不平顺,  $v_f, v_b$  是车辆前后轴处梁的挠度。相互作用力为

$$\begin{aligned} P_1 &= K(y - l\theta - v_f) + C(\dot{y} - l\dot{\theta} - \dot{v}_f) - KRnd_f + W_f \\ P_2 &= K(y - l\theta - v_b) + C(\dot{y} - l\dot{\theta} - \dot{v}_b) - KRnd_b + W_b \end{aligned} \quad (9)$$

$W_f, W_b$  为车辆前后轴重。将式(9)代入式(4)并与式(8)联立求解, 可得车桥的振动响应及车桥相互作用力。

### 四、荷载识别

由测试得到的桥梁响应如挠度、加速度及应变可以识别桥上移动荷载。由于梁的应变与

弯矩成比例, 本文采用弯矩。

式(5)、(6)、(7)分别记为

$$\{v\} = [S]\{V\} \quad \{\ddot{v}\} = [S]\{\ddot{V}\} \quad \{M\} = [S_n]\{V\}$$

如果通过测试得到  $\{v\}$ 、 $\{\ddot{v}\}$  或  $\{M\}$ , 采用最小二乘法可得桥梁的模式位移、模式加速度

$$\{V\} = ([S]^T[S])^{-1}[S]^T\{v\} \quad (10)$$

$$\{\ddot{V}\} = ([S]^T[S])^{-1}[S]^T\{\ddot{v}\} \quad (11)$$

$$\{V\} = ([S_n]^T[S_n])^{-1}[S_n]^T\{v\} \quad (12)$$

由  $\{M\}$  或  $\{v\}$  得到模式位移  $\{V\}$  后, 采用差分方法计算模式速度  $\{\dot{V}\}$  及模式加速度  $\{\ddot{V}\}$ 。

若是由  $\{\ddot{v}\}$  得到模式加速度  $\{\ddot{V}\}$ , 则采用数值积分方法计算模式速度  $\{\dot{V}\}$  及模式位移  $\{V\}$ , 然后由式(4)求得  $\{p\}$ , 式(4)记为

$$\{V\} + 2\{\zeta\omega\dot{V}\} + \{\omega^2V\} = [S^p]\{P\} \quad (13)$$

将式(13)与(4)式比较即知式中各项的内容, 这里不一一细述。

仍然采用最小二乘法

$$\{P\} = ([S^p]^T[S^p])^{-1}[S^p]^T(\{\ddot{V}\} + 2\{\zeta\omega\dot{V}\} + \{\omega^2V\}) \quad (14)$$

## 五、计算机仿真

取桥梁参数:  $EI = 2658069000\text{N} \cdot \text{m}^2$ ,  $\mu = 6067\text{kg/m}$

车辆参数:  $K = 128497\text{N/m}$ ,  $C = 998\text{N/m} \cdot \text{s}$ ,  $M = 8613\text{kg}$ ,  $I = 11484\text{kg} \cdot \text{m}^2$

车辆移动速度  $c = 20\text{m/s}$ , 计算时间步长  $\Delta = 0.001\text{s}$ 。

先由式(4)(8)(9)用 Newmark 法计算桥梁的响应及车桥相互作用力, 然后用上节介绍的方法识别作用于桥上的力并与计算车桥相互作用力比较以估计识别误差。实际应用上直接测得车桥相互作用力有困难, 因此采用识别荷载由式(4)(5)(6)(7)计算桥梁的响应并与实测桥梁响应比较以估计识别误差。由于桥梁位移的测试困难较多而应变的测试较容易, 本文采用弯矩对移动荷载进行识别, 响应中加进均值为零方差为响应的一定百分比的正态分布随机误差。

表 1 移动荷载识别误差

桥梁跨度 = 27.375m, 弯矩误差的方差: 1%

轴距 (m)	轴 1 误差 (%)		轴 2 误差 (%)	
		滤波		滤波
4	3117.79	33.55	3516.37	29.59
8	1547.16	18.97	1716.36	9.72
12	1744.15	18.87	1907.85	13.89
16	1334.27	8.6	1553.23	8.6

识别误差= 所有时刻识别荷载与真实荷载差的绝对值的总和/所有时刻真实荷载绝对值的总和。表 1 显示, 识别误差是不可接受的。如果先滤去响应中的高频部分( 本文采用 30 赫兹低通滤波), 则识别效果不错。轴距较大的荷载识别效果有所改善。

采用跨度较小的桥梁识别移动荷载的结果见表 2~4。

**表 2 移动荷载识别误差**  
桥梁跨度= 10m, 弯矩误差的方差: 1%

轴距 (m)	轴 1 误差 (%)		轴 2 误差 (%)	
		滤波		滤波
2	42.31	2.47	49.50	2.23
4	31.45	1.15	31.40	1.10
6	24.72	1.81	25.12	1.74
8	16.56	1.60	15.81	1.64
10	15.82	1.50	14.39	1.46

**表 3 移动荷载识别误差**  
桥梁跨度= 10m, 弯矩误差的方差: 2%

轴距 (m)	轴 1 误差 (%)		轴 2 误差 (%)	
		滤波		滤波
2	65.30	2.35	77.45	2.41
4	60.98	1.27	62.76	1.12
6	47.28	1.98	60.13	2.07
8	31.15	1.76	31.38	1.69
10	28.07	1.54	27.19	1.66

**表 4 移动荷载识别误差**  
桥梁跨度= 10m, 弯矩误差的方差: 5%

轴距 (m)	轴 1 误差 (%)		轴 2 误差 (%)	
		滤波		滤波
2	199.81	2.81	179.55	2.70
4	142.13	1.84	144.66	1.44
6	115.08	2.43	116.50	2.40
8	72.91	1.93	74.07	2.30
10	68.06	2.11	69.80	2.06

图 3、4 所示跨度为 10 米轴距为 4 米随机误差的方差为 1% 时轴 1、2 的识别结果。图 5、6 为滤波后的识别结果。图 7 为根据滤波后识别荷载重建弯矩与真实弯矩的比较。

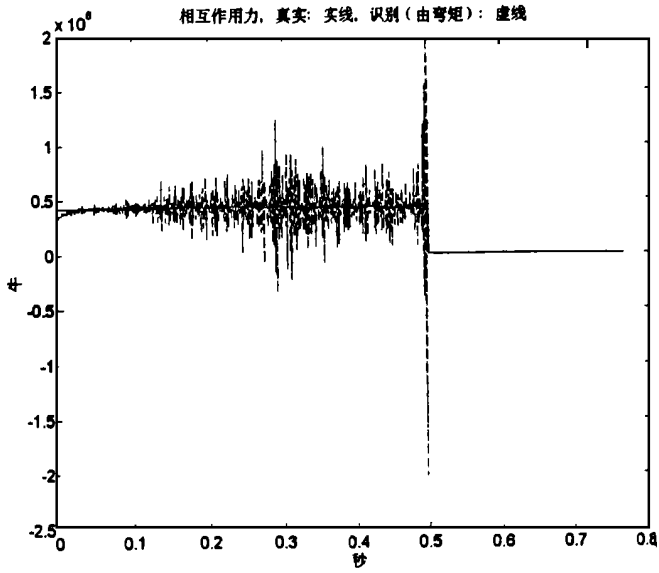


图 3

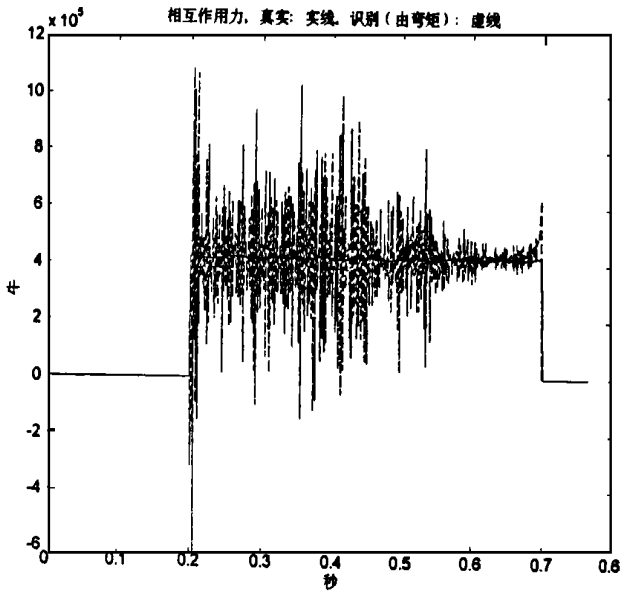


图 4

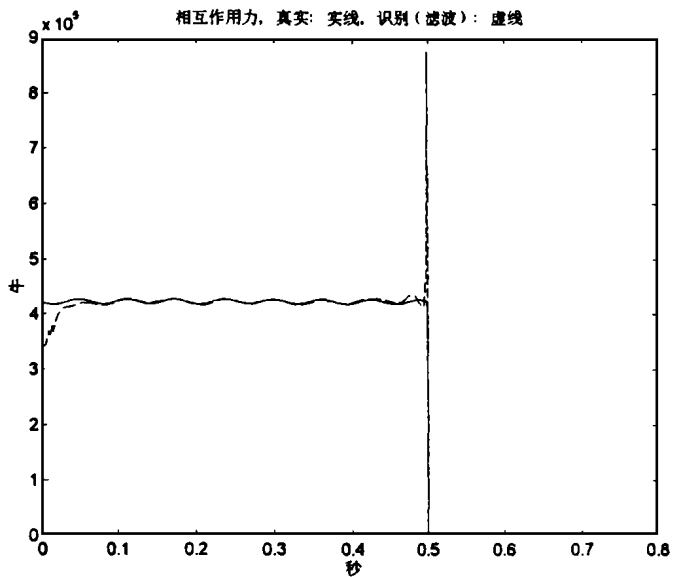


图 5

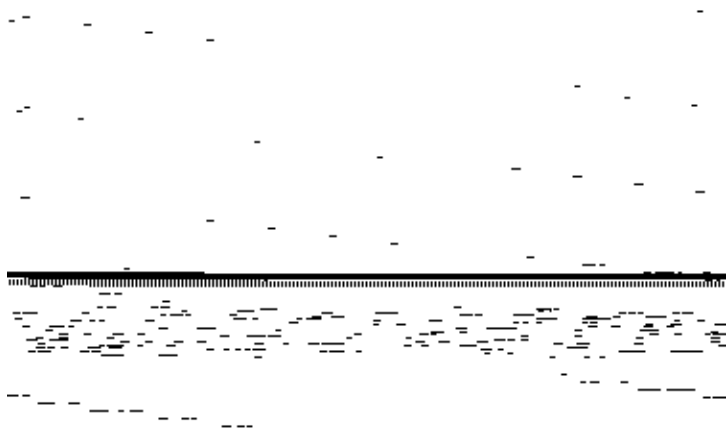


图 6

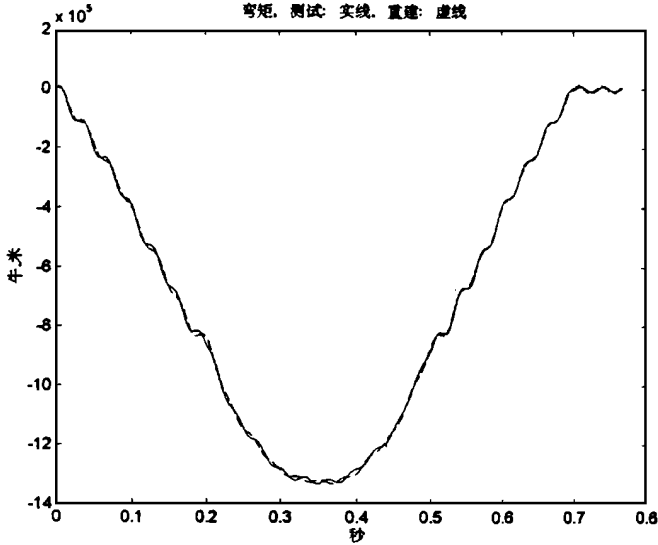


图 7

## 六、结 论

1、由响应识别移动荷载的效果对随机误差较敏感,但桥梁响应信号较好时,荷载识别结果是可以接受的。

2、小跨度桥梁识别移动荷载的效果好于大跨度桥梁。间距大的荷载识别结果好于间距小的荷载识别。

3、本文介绍的方法与文[1]的方法相比,采用分布参数桥梁模型避免了模型离散造成的误差,响应与激励完全同步,避免了由于不同步引起的误差。

## 参 考 文 献

- 1 O Connor, C Chan, T H T. Dynamic wheel loads from bridge strainms. J Struct Eng ASCE, 1988; 114(8) : 1703-1723
- 2 袁向荣,陈恩利,杨绍普.由梁的响应识别移动荷载.振动测试与诊断,1995; 15(3): 30-33



# IDENTIFICATION OF MOVING LOADS FROM BRIDGE RESPONSES

Yuan Xiangrong

Chen Enli

Tommy Hung-tin Chan

(Shijiazhuang Railway Institution, Shijiazhuang 050043)

(Hong Kong Polytechnic University)

**Abstract** In this paper, the method of identification of moving time-dependent loads from bridge responses based on Euler beam vibration theory is introduced. The modal displacements of the beam were identified from the deflections on strains of the beam. The modal velocities and accelerations of the beam were calculated with central difference method. The moving forces were identified with the least square method based on the modal coordinate equation of the beam. The influence of test error, load spaces and bridge span on the identification are discussed.

**Key words** moving loads identification, bridge, vibration response