

# 受横向约束的细长无重管柱在压扭组合作用下的后屈曲分析\*

刘凤梧 徐秉业 高德利

(清华大学工程力学系, 北京 100084) (石油大学石油工程系, 北京 100083)

**提 要** 井眼中管柱的屈曲, 将会使钻井、采油生产等作业难以顺利进行, 弄清管柱屈曲后的特性对石油工程有重要的实际意义。本文首先建立了受横向约束的管柱在轴向载荷和扭矩的作用下的屈曲平衡方程; 并对所得四阶非线性常微分方程进行了分析、求解。结果表明, 在特定边界条件下, 受压扭组合作用的管柱屈曲构形为精确的圆柱螺旋线; 并进而得到了管柱屈曲变形与载荷之间的解析关系; 本文结果退化后与文献所得结果一致; 最后讨论了管柱所受扭矩对螺旋屈曲行为的影响和扭矩对螺旋旋向的影响。

**关键词** 管柱, 压扭组合, 螺旋屈曲, 后屈曲

## 一、引 言

在钻井、完井及采油等石油工程中, 钻柱、套管等都为细长管柱, 管柱受井眼的横向约束。当由于钻压、摩阻, 扭矩等载荷作用超过某个限度时, 管柱就会发生屈曲。由于井眼对管柱变形的限制, 管柱的屈曲行为与一般杆的屈曲行为有显著的不同: 当载荷较小时, 管柱处于直线平衡状态; 当载荷到达某个极限值时, 管柱的直线平衡状态不再稳定, 这对应于管柱的正弦屈曲; 若载荷继续增加, 管柱轴线变成一条空间曲线, 逐渐变为空间螺旋线状, 以致螺旋状的管柱与井眼内壁完全接触, 此即所谓的管柱螺旋屈曲。管柱螺旋屈曲后, 若载荷继续增加, 将会使管柱与井壁的接触力显著增加。最后管柱一端的载荷将

\* 本文收稿日期: 1997年3月

会与管柱和井壁的接触力相平衡，而不能有效地传递到另一端，此即所谓的管柱自锁。自锁发生后，任何实际作业将无法进行。

在石油工程中，管柱的屈曲行为限制了钻井时的最大钻压，也限制了水平井、大位移井等的最大可钻位移等。因而管柱屈曲分析对诸如井身设计、管柱强度分析、施工问题分析等都有重要意义。并且由于管柱屈曲后，井下作业常能顺利进行，这时管柱的屈曲后分析显得更为重要。目前这方面的工作主要是以 Lubinski 的工作为基础，先假设屈曲形状为圆柱螺旋线，考虑端部作用轴向力，分析井眼中管柱的屈曲行为。实际钻井工程中，除轴向载荷外，管柱还同时受到很大的扭矩作用，而扭矩的作用对管柱螺旋屈曲影响的研究文献不多，Miska(1995)在假设管柱螺旋屈曲构形的基础上，分析了不计管柱自重时在轴向载荷和扭矩同时作用下的管柱螺旋屈曲行为，用能量法得到了螺距与载荷之间的关系；而管柱屈曲后的实际构形如何，扭矩的作用对螺旋屈曲行为的影响，及所得结果的适用范围用能量法难以得到解答。

本文首先建立了受横向约束的管柱在轴向载荷和扭矩作用下的屈曲平衡方程；并对所得四阶非线性常微分方程进行了分析、求解；结果表明，在特定边界条件下，受压扭组合作用的管柱屈曲构形为精确的圆柱螺旋线；并进而得到了管柱屈曲变形与载荷之间的解析关系；本文结果退化后与文献中所得结果一致；最后讨论了管柱所受扭矩对螺旋屈曲行为的影响和扭矩对螺旋旋向的影响。

## 二、管柱屈曲后微分方程的建立

为简化分析，本文作如下假设：

(1) 管柱屈曲后其轴线与井眼轴线夹角仍然很小，可以应用细长梁理论简化弯矩与曲率之间的关系；

(2) 管柱和约束园管足够长，可以忽略管柱的端部边界对管柱屈曲行为的影响。

(3) 约束园管园直，并忽略摩阻的影响；

(4) 管柱与约束园管保持连续接触；

(5) 管柱自重影响很小，暂略去不计。

坐标的建立如图 1 所示，右手坐标系  $oxyz$ ，其中  $z$  轴沿约束园管轴线，由于管柱与约束园管连续接触，并受内壁约束，所以轴线上任一点  $C$ ，均在半径为  $r = R_w - R_d$  的圆柱面上。其中  $\theta$  为管柱相应的偏转角。

$C$  点矢径可表为：

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1)$$

$$x = r \cos \theta \quad (2)$$

$$y = r \sin \theta \quad (3)$$

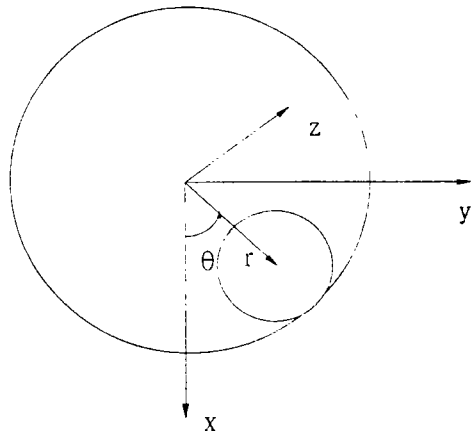


图 1 管柱屈曲后的几何关系

$$\frac{d\mathbf{r}}{dz} = \frac{dx}{dz} \mathbf{i} + \frac{dy}{dz} \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad (4)$$

约束园管与管柱之间的接触力为:

$$\mathbf{f} = -N \cos \theta \mathbf{i} - N \sin \theta \mathbf{j} \quad (5)$$

平衡关系:

在  $z$  处从管柱中截取微元  $dz$ , 其上作用力为  $\mathbf{f}dz$ ,  $z$  处矢径为  $\mathbf{r}$ , 内力、内力矩分别为  $-\mathbf{F}, -\mathbf{M}$ ;  $z+dz$  处矢径为  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ , 内力和内力矩分别为  $\mathbf{F} + d\mathbf{F}, \mathbf{M} + d\mathbf{M}$ ; 由合为、合力矩平衡, 略去高阶小量得微元平衡方程:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dz} + \mathbf{f} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dz} + \frac{d\mathbf{r}}{dz} \times \mathbf{F} = 0 \quad (7)$$

其中:

$$\mathbf{F}(z) = F_x(z)\mathbf{i} + F_y(z)\mathbf{j} + F_z(z)\mathbf{k} \quad (8)$$

$$\mathbf{M}(z) = M_x(z)\mathbf{i} + M_y(z)\mathbf{j} + M_z(z)\mathbf{k} \quad (9)$$

其微元平衡方程沿坐标轴投影为:

$$\frac{dF_x}{dz} = N \cos \theta \quad (10)$$

$$\frac{dF_y}{dz} = N \sin \theta \quad (11)$$

$$\frac{dF_z}{dz} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{dM_x}{dz} = F_y - F_z \frac{dy}{dz} = F_y - F_z r \frac{d \sin \theta}{dz} \quad (13)$$

$$\frac{dM_y}{dz} = -F_x + F_z \frac{dx}{dz} = -F_x + F_z r \frac{d \cos \theta}{dz} \quad (14)$$

$$\frac{dM_z}{dz} = F_x \frac{dy}{dz} - F_y \frac{dx}{dz} \quad (15)$$

物理关系: 由细长梁理论有:

$$\mathbf{M} = EI \left( \frac{d\mathbf{r}}{dz} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dz^2} \right) + GJ \frac{d\gamma}{dz} \frac{d\mathbf{r}}{dz} \quad (16)$$

其沿坐标轴投影为:

$$M_x = -EI \frac{d^2 y}{dz^2} + GJ \frac{d\gamma}{dz} \frac{dx}{dz} \quad (17)$$

$$M_y = EI \frac{d^2 x}{dz^2} + GJ \frac{d\gamma}{dz} \frac{dy}{dz} \quad (18)$$

$$M_z = EI \left( \frac{dx}{dz} \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{d^2 x}{dz^2} \frac{dy}{dz} \right) + GJ \frac{d\gamma}{dz} \quad (19)$$

这里  $E$  为弹性模量,  $G$  为剪切弹性模量,  $I$  为管柱截面对中性轴的惯性矩,  $J$  为截面的极惯性矩,  $\gamma$  为扭转角。

方程组简化:

由(12)式可得  $F_z = \text{常数}$ , 即轴向力为常数。为此令

$$F_z = -F_0 \quad (20)$$

将(17)、(18)代入(13)、(14)再代入(10)、(11)式中, 消去  $N$  化简有:

$$\theta'''' + \left( \frac{F_0}{EI} + 3 \frac{M_n}{EI} \theta' - 6\theta'^2 \right) \theta'' = 0 \quad (21)$$

此即约束园管内无重管柱受压扭作用时的屈曲方程,

其中

$$\theta' = \frac{d\theta}{dz}, \quad \theta'' = \frac{d^2\theta}{dz^2}, \quad \theta'''' = \frac{d^4\theta}{dz^4}$$

进一步可解得管柱与约束管壁之间的接触力为

$$N = EIr(4\theta'\theta'''' + 3\theta''^2 - \theta'^4) + M_n r(\theta'^3 - \theta''''') + F_0 r \theta'^2 \quad (22)$$

(22)式即为管柱屈曲后管柱与约束管壁之间接触力关系式

### 三、微分方程的求解及结果讨论

#### 1. 微分方程的求解

将非线性常微分方程(21)两端积分有

$$\theta'''' + \frac{F_0}{EI} \theta' + \frac{3M_n}{2EI} \theta'^2 - 2\theta'^3 = C_0 \quad (23)$$

其中  $C_0$  为积分常数

$$C_0 = \theta''''(z_0) + \frac{F_0}{EI} \theta'(z_0) + \frac{3M_n}{2EI} \theta'^2(z_0) - 2\theta'^3(z_0) \quad (24)$$

其中, 对于无限长管柱  $z_0$  可以为任一坐标值, 由于  $z_0$  的任意性, 只能有  $\theta''(z_0) = 0$ ,

$\theta'(z_0) = \text{const}$ ; 由于  $\theta'(z_0) = 0$ , 对应管柱的直线平衡形式, 应该为方程(23)解, 可知

$C_0 = 0$ ; 因此有

$$\frac{F_0}{EI} \theta' + \frac{3M_n}{2EI} \theta'^2 - 2\theta'^3 = 0 \quad (25)$$

容易得到以上代数方程的三个解:

$$\theta' = 0, \quad \text{对应管柱的直线平衡形式} \quad (26)$$

$$\theta' = \frac{3M_n}{8EI} \pm \sqrt{\frac{9M_n^2}{64E^2I^2} + \frac{F_0}{2EI}} \quad (27)$$

对应管柱的螺旋屈曲平衡状态, 其中正、负号表示管柱屈曲构形螺旋的旋向;

(27)式即为非线性常微分方程(21)对应于本问题的解。

由此可知在本文假设成立的前提下, 对于无限长的无重管柱在井眼内受压力和扭矩共

同作用下,其螺旋屈曲构形确为圆柱螺旋线。证明文献[3]在这种情况下假设屈曲构形为等距螺旋线是真实的屈曲构形。

## 2. 扭矩对屈曲构形旋向的影响

微分方程(21)的三个分支解对应管柱的三个平衡状态,一个解对应管柱的直线平衡状态,另外两个解对应管柱的一对非对称螺旋屈曲状态;当单独作用扭矩时,其螺旋线的旋向与扭矩的方向一致;当(27)式中的第二项大于第一项时,其螺旋的旋向将有两种可能并且与加载的顺序有关:

(1) 当先作用扭矩或扭矩与压力同时作用时,其扭矩对螺旋的旋向产生决定性影响;

(2) 若先作用压力并产生螺旋屈曲,其屈曲构形的旋向随机,再作用扭矩并不能改变屈曲构形的旋向:若扭矩的作用方向与已屈曲构形旋向相同,则加重管柱螺旋屈曲的程度;若扭矩的作用方向与已屈曲构形的旋向相反,则减轻管柱螺旋屈曲的程度。这与 Lubinski 实验观察到的现象一致。在实际工程中对扭矩使螺旋屈曲加重的情况更感兴趣,因此在以后的分析中,在式(27)中只取正号进行分析。

## 3. 与能量法结果的比较

设管柱屈曲构形螺旋线的螺距为  $h$ , 则  $\theta'(z) = \frac{2\pi}{h}$ , 进一步可得:

$$F_0 + \frac{3\pi M_n}{h} = \frac{8\pi^2 EI}{h^2} \quad (28)$$

此即园管约束下无重管柱受压扭作用螺旋屈曲后载荷与螺距之间的关系式,与文献[3](1995年)用能量法所得结果一致。

若  $M_n=0$ , 可得  $F_0 = \frac{8\pi^2 EI}{h^2}$  与 Lubinski(1962)的结果一致;

将(27)式代入(22)式,整理得管柱螺旋屈曲后与井壁之间的接触力为:

$$N = r \left[ \frac{9}{32} \left( \frac{M_n}{EI} \right)^2 + \frac{F_0}{2EI} \pm \frac{3M_n}{4EI} \sqrt{\frac{9}{64} \left( \frac{M_n}{EI} \right)^2 + \frac{F_0}{2EI}} \right] \times \left[ \frac{3M_n^2}{32EI} + \frac{F_0}{2} \pm \frac{M_n}{4} \sqrt{\frac{9}{64} \left( \frac{M_n}{EI} \right)^2 + \frac{F_0}{2EI}} \right] \quad (29)$$

若  $M_n=0$ , 上式退化为  $N = \frac{F_0^2 r}{4EI}$  与 Mitchell(1988)对井眼内无重管柱在轴向压力作用

下螺旋屈曲后管柱与约束管壁的接触力公式一致。

## 四、算 例

一直井中的管柱,  $EI = 600\text{kN} \cdot \text{m}^2$ ,  $r=0.055\text{m}$ , 轴向载荷  $F_0 = 100\text{kN}$ , 管柱所受扭矩在  $0 \sim 20\text{kN} \cdot \text{m}$  之间变化, 扭矩对管柱屈曲行为的影响见图 2 和图 3。

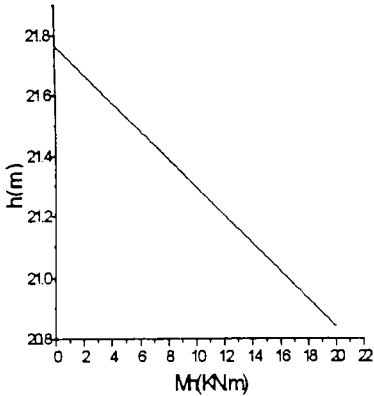


图 2 扭矩对螺距的影响

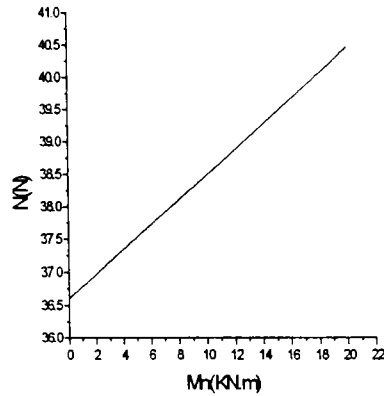


图 3 扭矩对接触力的影响

## 五、结 论

1、本文通过建立和分析受圆管约束的管柱在压扭组合作用时的屈曲平衡方程，得到了管柱螺旋屈曲的屈曲构形与载荷之间的关系式，管柱和约束管壁之间的接触力公式；

2、证明了受圆管约束的无重管柱在压扭组合作用下，当不考虑其端部边界的影响时，其屈曲构形为精确圆柱螺旋线；

3、管柱所受扭矩对屈曲构形旋向的影响与加载顺序有关，可能加重螺旋屈曲，也有可能减轻螺旋屈曲的程度；

4、本文结果退化后与有关文献中用能量法得到的结论一致。

## 参 考 文 献

- 1 Lubinski, A, Althouse, W S and Logan, J L. Helical buckling of tubing sealed in packer. Journal of Petroleum Technology, June, 1962: 655-670
- 2 Dawson R and Paslay, P R. Drilling Buckling in Inclined Holes. JPT(Oct.1984) 1737-38[3]. Mitchell, R.F. "New concept for helical buckling" SPE Drill. Eng. Sept. 1988: 303-310
- 3 Miska, S and Cunha, J C S. Helical buckling of long weightless strings subject to axial and torsional loads. Drilling Technology ASME 1995
- 4 Mitchell, R F. New Concept for Helical Buckling. SPE Drill. Eng. Sept. 1988: 303-310
- 5 武际可, 黄永刚. 弹性曲杆的稳定性. 力学学报, 1987(5):445 - 454
- 6 高德利, 刘希圣, 徐秉业. 井眼轨迹控制. 石油大学出版社, 1994; 12

## ANALYSIS OF POST-BUCKLING OF Laterally CONSTRAINED LONG WEIGHTLESS TUBING SUBJECT TO AXIAL AND TORSIONAL LOADS

Liu Fengwu Xu Bingye

Gao Deli

(Tsinghua University, Beijing 100084)

(University of Petroleum, Beijing 100083)

**Abstract** The equilibrium equation for a long weightless buckled tubing in straight well under axial thrust and torsional moment is developed; The fourth-order strongly nonlinear ordinary differential equation is directly solved. The results show that the post-buckling configuration of the tubing under some idealized conditions is an exact helical shape. An analytical solution for the relation between load and pitch has been determined. The influence of torsional loads on post-buckling of tubular in well bores, especially on the tubing spirals to the right or left, has been discussed. The degeneracy of the analytical results is coincident with those given by others using energy method.

**Key words** tubing, drillstring, post-buckling, helical buckling

---

(上接 139 页)

## ON DYNAMIC STRESS CONCENTRATION AROUND THE PRESSURE BALANCING HOLES ON DISKS OF A COMPRESSOR

Liu Fuqing

Wang Bo

(Department of Mechanics Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084)

**Abstract** The dynamic stress concentration around the pressure balancing holes on compressor disks is studied experimentally. The resonance method excited by sine sweeping and the transfer function method excited by hammer impact are adopted. The factors of the stress concentration obtained from both methods are coincident. The results of this paper are valuable for the diagnosing of the cracks on disks and the searching of countermeasures. The experimental methods can be used to study the stress concentration problem on other structures.

**Key words** vibration mode, resonance, dynamic stress, stress concentration, transfer function