

基于双剪统一屈服准则的混凝土 矩形板极限荷载的研究

赵均海, 张永强, 李建春

(西北建筑工程学院建工系, 西安 710061)

提 要: 采用双剪统一强度理论(俞茂宏, 1991) 求出了矩形板的塑性极限荷载的统一解, 得出了不同参数 b 值对极限荷载的影响曲线, 从而得出了一系列从 Tresca 的单剪屈服准则解到双剪应力屈服准则(俞茂宏, 1961)的矩形板极限荷载。文献中已有的 Tresca 解为本文的一个特例。将其用于混凝土矩形板的极限荷载计算, 得出了满意的结果。双剪统一强度理论可以给出更符合于各种不同材料特性的合理解。

关键词: 双剪统一屈服准则; 塑性极限荷载; 混凝土矩形板

中图分类号:

文献标识码: A

1 引言

在塑性极限分析中, 现在常用的有 Tresca 的单剪应力屈服准则(1864), 它适应于 $\tau_s = 0.5\sigma_s$ 的材料, Mises 的八面体剪应力准则(1913, 亦称为三剪准则), 它适应于 $\tau_s = 0.577\sigma_s$ 的材料, 俞茂宏的双剪应力屈服准则(1961)^[1], 它适应于 $\tau_s = 0.667\sigma_s$ 的材料, 也就是说它们各自只能适用于某一类材料, 即它们都是单一屈服准则。文献[2~4]分别用不同的准则得出了圆形板的单剪、双剪和三剪准则解, 它们都只适用于某一类材料。

1991年俞茂宏在双剪准则的基础上, 建立了一种全新的考虑了 σ_2 影响的适用于各种不同材料的双剪统一强度理论, 它用一个统一的模型、简单的统一的数学表达式, 能十分灵活地适用于各种不同特性的材料, 其数学表达式为^[5, 6]

$$F = \sigma_1 - \frac{\alpha}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_3) = f_t \quad \text{当 } \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \quad (1a)$$

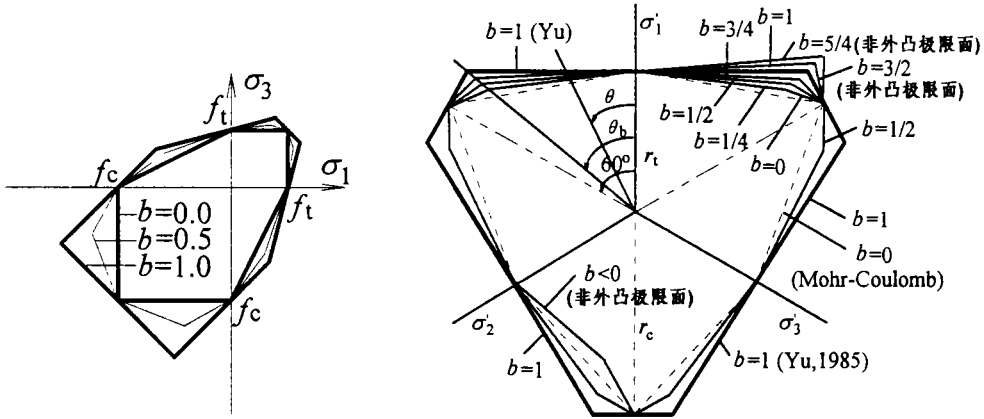
$$F' = \frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = f_t \quad \text{当 } \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \quad (1b)$$

收稿日期: 1997-9

作者简介: 赵均海

基金项目: 国家自然科学基金研究项目和国家教育委员会重点科学技术项目

由上式可得,俞茂宏双剪统一强度理论在双向应力及 π 平面下屈服线图形如图1所示。当 $\alpha=1$ 时,上式变成俞茂宏双剪统一屈服准则^[7, 8],它适应于拉压强度相等的材料。



(a) 双向应力状态 ($\alpha = 0.5$)

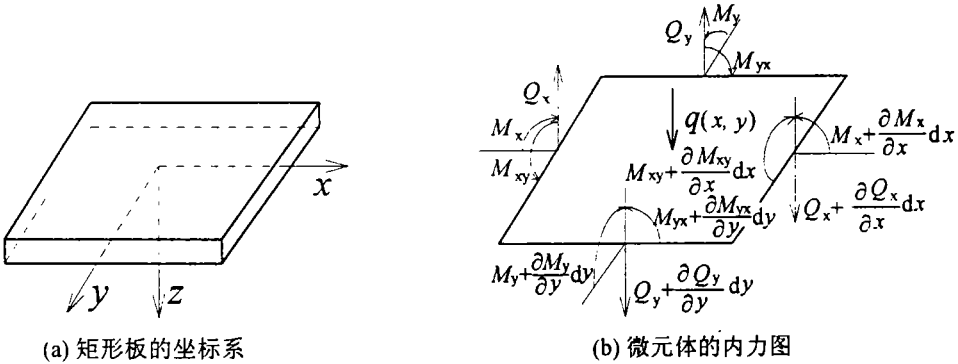
(b) 三向应力状态

图1 统一强度理论的系列极限面(俞茂宏)

2 矩形板的极限荷载统一解^[9]

取矩形板的坐标如图2(a)所示,微元体的受力如图2(b),得平衡方程

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = q(x, y) \tag{2}$$



(a) 矩形板的坐标系

(b) 微元体的内力图

图2 矩形板坐标系及微元体内力

经推导,可得用 M_x, M_y, M_{xy}, M_p 表示的双剪统一强度理论的极限荷载方程为

$$(1+b+\alpha)^2 (M_x - M_y)^2 + 4(1+b+\alpha)^2 M_{xy}^2 - (1+b-\alpha)^2 (M_x + M_y)^2 = 4(1+b) M_p ((1+b) M_p - (1+b-\alpha)(M_x + M_y)) \tag{3a}$$

$$(1+b+\alpha)^2 (M_x - M_y)^2 + 4(1+b+\alpha)^2 M_{xy}^2 - (1+b-\alpha)^2 (M_x + M_y)^2 = 4(1+b) M_p ((1+b) M_p + (1+b-\alpha)(M_x + M_y)) \tag{3b}$$

对于正方形简支板, 设内力为

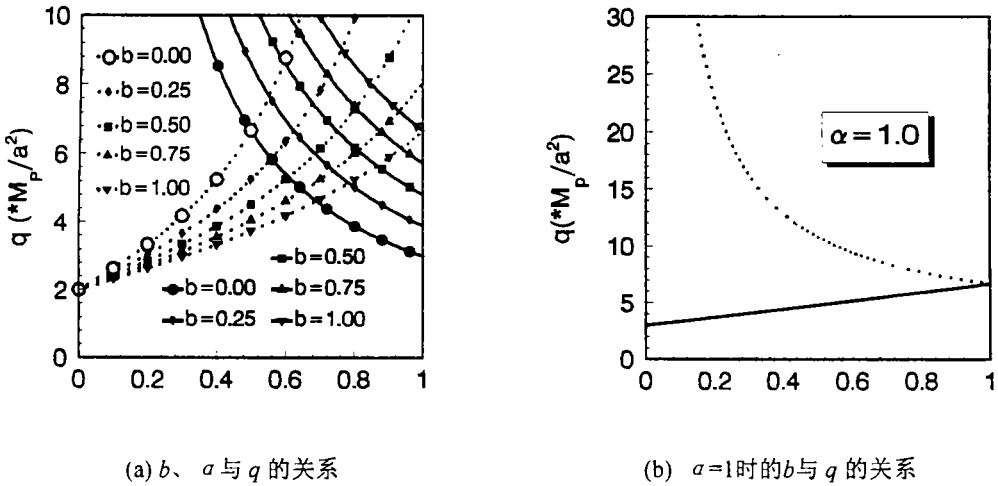
$$M_x = c(a^2 - x^2) \quad M_y = c(a^2 - y^2) \tag{4}$$

式中 a 为边长的一半,代入方程式(2)可得 $\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = 2c - \frac{q}{2}$,为满足此式,取 $M_{xy} = (2c - \frac{q}{2})xy$,常数 c 在求解过程中通过极值运算可以确定。将 M_x 、 M_y 、 M_{xy} 代入式(3a)、(3b),经推导得

$$q = 2\left(\frac{2(1+b)}{1+b-\alpha} \pm \frac{1+b}{1+b+\alpha}\right) \frac{M_p}{a^2} \tag{5a}$$

$$q = 2\left(\frac{2(1+b)}{\alpha} \pm \frac{1+b}{1+b+\alpha}\right) \frac{M_p}{a^2} \tag{5b}$$

从公式(5a)(5b)可知, b 、 α 对 q 有较大的影响。当式(5)中取减号时的关系曲线如图3(a)所示,其中虚线表示从公式(5a)计算出的 b 、 α 与 q 的关系,实线表示从公式(5b)计算出的 b 、 α 与 q 的关系。显然虚线是不合理的,这是由于双剪统一强度理论公式有两个,在使用公式时要加以判别,才能得出正确的解,因此正方形板的双剪统一强度理论解为式(5b)。对于 $\alpha=1$ 的拉压强度相等的材料,式(5)中取减号时 b 与 q 的关系如图3(b)所示。当 $b=0$ 时所得 q 为Tresca解, $b=0.5$ 时所得 q 为Mises解, $b=1$ 时所得 q 为双剪应力解。对于不同的材料, b 可以取不同的值,亦即双剪统一强度理论可以适用于多种材料。



(a) b 、 α 与 q 的关系 (b) $\alpha=1$ 时的 b 与 q 的关系
 (图中虚线表示由式(5a)计算的结果,实线表示由式(5b)计算的结果)

图3 正方形板 b 、 α 与 q 的关系

对于矩形简支板, 设内力为

$$M_x = C_1\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) \quad M_y = C_2\left(\frac{L^2}{4} - y^2\right) \tag{6}$$

上式中 l, L 分别为矩形板短边、长边的边长,代入平衡方程式(2)、和用双剪统一强度理论用内力表示的强度条件式(3a)(3b),经推导得

$$q = \left(\left(\frac{1+b}{\alpha} \right) \left(\frac{8}{l^2} + \frac{8}{L^2} \right) \pm \frac{8(1+b)}{(1+b+\alpha)lL} \right) M_p \quad (7)$$

令 $l = L = 2a$ ，得正方形板的极限荷载

$$q = (1+b) \left(\frac{4}{\alpha} \pm \frac{2}{1+b+\alpha} \right) \frac{M_p}{a^2} \quad (8)$$

当 $\alpha = 1$ ，对(7)式进行变换可写成

$$q = \left((1+b) \left(8 + \frac{8}{(L/l)^2} \right) \pm \frac{8(1+b)}{(2+b)L/l} \right) \frac{M_p}{l^2} \quad (9)$$

对于不同的 L/l ，由式(9)可得 $q \sim L/l$ 的关系。

由于所假设的内力表达式(4)、(6)和极限条件式(3)均满足静力容许场，所以求得的结果为极限荷载的下限解。

3 双剪统一强度理论中 b 参数的选择

双剪统一强度理论中的参数 b 为中间主剪应力以及相应面上的正应力对材料破坏影响程度的参数，采用不同的参数 b 值，可以得到一系列不同的强度理论，不同的 b 值可以对应于不同的工程材料，因此双剪统一强度理论可以适用于各种材料。由于得出一组三轴试验的结果较为昂贵，因此在一般工程应用中，可通过以下两种方法确定参数 b [10]。

1、通过材料的剪切强度极限 τ_0 和拉压强度极限 f_t 、 f_c 用下式计算双剪统一强度理论中的参数 b

$$b = \frac{(1+\alpha)\tau_0 - f_t}{f_t - \tau_0} \quad (10)$$

当 $\alpha = 1$ 时，双剪统一强度理论简化为双剪统一屈服准则，上式变为

$$b = \frac{2\tau_0 - f_t}{f_t - \tau_0} \quad (11)$$

2、假设 b 为某一值，代入双剪统一强度理论与试验值比较，从而确定出适应于某一类材料的 b 值。一般情况下 b 取 0、1/4、1/2、3/4、1 等，特别是当 $b=0$ 时，双剪统一强度理论变为

$$F = F' = \sigma_1 - \alpha\sigma_3 = f_t \quad (12)$$

此式即为 Mohr-Coulomb 的单剪强度理论。

4 混凝土板的极限荷载及其比较

钢筋混凝土板在建筑结构中有着广泛的应用，对其进行极限荷载分析，不仅可以了解板在塑性极限状态下的承载能力，对其实际极限承载能力作出正确估计，而且可以在同等条件下充分发挥材料的性能。由于钢筋混凝土板极限分析的复杂性，对其研究一般采用塑性铰线法，但是，板的塑性铰线一般建立在试验的基础上，而且要考虑各种破坏的可能性。文献[2]用 Mises 极限条件和最大弯矩极限、Tresca 极限条件求出了矩形板的极限荷载。本文用双剪统一强度理论求出了矩形板的统一解，文献[2]的结果为本文统

一解的特例。

在式(5b)中,对于素混凝土, α 一般在 0.07~0.15之间,计算时根据试验得出的 α 值代入式(5b)即可计算出混凝土板的极限荷载,对于配筋混凝土,取 $\alpha = 1$,在式(5b)中,根据配筋率可取 $b=0.5\sim 0.75$,代入公式,计算出极限荷载 q ,与文献[2]的承受均布荷载作用的简支正方形板的试验结果相比较(如表1)。从表1可知,双剪统一强度理论的统一解中当 b 取得合适时的结果与试验结果比较接近,这说明所选的静力容许的内力场与极限破坏时的真实内力场较接近。

表1 极限荷载(总值, kN)的试验结果与计算结果比较

截面厚度(cm)	配筋率(%)	参数 b	极限弯矩 (nm/m)	文献[2] 计算值	本文计算值	试验值	试验平均值	文献[2] 差值(%)	本文差值 (%)	上限解
8.1	0.58	0.75	11.4	238.0	261.0	262.5	262.0	10.0	0.04	316.5
						263.0				
						260.0				
12.1	0.32	0.70	16.9	353.0	374.6	370.0	375.0	5.0	0.12	469.1
						380.0				

用塑性铰线法可求出极限荷载的上限解。由文献[2]的实验资料知正方形板的塑性铰线发生在对角线上,因此板的外力功为

$$W_e = q \int_A wdA \quad (13)$$

其中 $\int_A wdA$ 为发生塑性变形后形成的四棱锥形的体积,且有 $V = (4/3)a^2$,所以

$$W_e = (4/3)qa^2 \quad (14)$$

计算内力功时由于采用刚塑性变形模型,因此只考虑塑性铰线处极限弯矩在板转动时所做的功。计算得内力功为

$$W_i = (16/\sqrt{3})M_p \quad (15)$$

由 $W_e = W_i$ 得塑性极限荷载的上限解为

$$q = 6.94(M_p/a^2) \quad (16)$$

所得混凝土板塑性极限荷载见表1。

5 结论

1、本文用双剪统一屈服准则(俞茂宏, 1992)求出了混凝土矩形板的极限荷载的统一解, b 取不同的值,可以得出一族从单剪屈服准则(Tresca, 1864)到双剪应力屈服准则(俞茂宏, 1961)的混凝土矩形板的极限荷载。文献[2]的结果为本文统一解的特例。

2、双剪统一强度理论中选择不同的 b 值,可以适用于不同的工程材料,因此,双剪统一强度理论可以适用于各种工程材料。

3、双剪统一强度理论中参数 b 对塑性极限荷载有较大的影响。

参考文献:

- [1] Yu Maohong. Twin Shear Stress Yield Criterion. *Int. J. of Mech. Sci.*, 1983; 25(1): 71~74
- [2] 徐秉业, 刘信声. 结构塑性极限分析. 北京: 中国建筑工业出版社, 1985
- [3] 李跃明. 用一个新的屈服准则进行弹塑性分析. *机械强度*, 1988; 10(3): 70~74
- [4] 黄文彬, 曾国平. 应用双剪应力屈服准则求解某些塑性力学问题. *力学学报*, 1989; 21(2): 249~256
- [5] Yu Maohong, He Linan. A new model and theory on yield and failure of materials under complex stress state. *Mechanical Behaviour of Materials-VI*, Pergamon Press, 1991; (3): 841~846
- [6] 俞茂宏, 何丽南, 宋凌宇. 双剪应力强度理论及其推广. *中国科学, A 辑*, 1985; 28(12): 1113~1120
- [7] 俞茂宏, 何丽南, 刘春阳. 广义双剪应力屈服准则及其推广. *科学通报*, 1992; 37(2): 182~185
- [8] Yu Maohong, He Linan, Liu Chunyang. Generalized Twin Shear Stress Yield Criterion and Its Generalization. *Chinese Science Bulletin*, 1992; 37(24): 2085~2089
- [9] 赵均海, 李建春, 张永强. 用双剪统一屈服准则求矩形板的极限荷载. *机械强度*, 1998; 20(3)
- [10] 俞茂宏, 曾文兵. 工程结构分析新理论及其应用. *工程力学*, 1994; 11(1): 9~19

A NEW METHOD TO CALCULATE THE LIMIT LOAD OF CONCRETE RECTANGULAR PLATE

ZHAO Jun-hai, ZHANG Yong-qiang, LI Jian-chun

(Civil Engineering Department, Northwestern Institute of Architectural Engineering, Xia'an 710061)

Abstract: This paper presents a new method to calculate the limit load of rectangular plate based on the Twin Shear Unified Strength Theory (M.H.Yu,1991). Unified solutions which consist of a series of solutions from the upper load limit based on Twin Shear Yield criterion (M.H.Yu,1961) to the lower load limit based on Tresca Yield criterion are obtained and solution based on Tresca Yield Criterion is a special case of the unified solutions. Influence of weighted parameter b on the limit load of rectangular plate is also proposed, which can be used to fit different properties of different materials. Using this new method to calculate the limit load of concrete rectangular plate, a satisfactory solution is gained.

Key words: twin shear unified yield criterion, plastic limit load, concrete rectangular plate