

文章编号 : 1000-4750(2002)02-095-05

分数指数模型的热力学分析及其应用

张为民¹, 张淳源²

(1. 湘潭大学基础力学与材料工程研究所, 湖南 湘潭 411105; 2. 湘潭大学建筑工程系, 湖南 湘潭 411105)

摘 要: 本文论证了两种经典粘弹性固体模型的等价性并指出了其存在的问题。给出了热力学对分数指数模型^[1]参数的限制条件。计算与实验结果比较表明: 因为该模型具有适当多的参数, 采用同一组参数可以做到同时与同一材料的蠕变和松弛试验结果很好吻合; 并能做到松弛模量和蠕变柔量的 Stieltjes 卷积近似等于单位阶跃函数; 在很宽广的频率范围内能同时很好地模拟真实材料的存储模量和损耗模量。由于其计算速度快, 能与大多数真实材料的性能实验结果相拟合, 可以广泛应用于工程实际中的粘弹性静力和动力问题的计算。

关键词: 粘弹性固体; 流变模型; 分数指数模型; 松弛模量; 蠕变柔量

中图分类号: O345 **文献标识码:** A

1 引言

流变模型是工程计算的基础。实验结果表明, 由经典模型理论得到的微分型本构关系不能很好与实验数据吻合^[2]。如标准线性体, 虽然它可以描述固体的瞬时弹性和延迟弹性, 但蠕变和松弛的整个过程却不能与实验数据很好吻合, 特别是在蠕变或松弛的初始阶段。目前有两种经典的粘弹性固体模型: 1、Rabotnov 模型^[3], 采用具有弱奇异核的积分型本构关系。积分方程的核是一个交错无穷级数。2、分数微积分模型^[4], 采用分数阶导数的本构关系。此模型的蠕变柔量和松弛模量不能写成时间 t 的显式, 而是一个隐含时间变量 t 的无穷积分, 而且是奇异积分。两种模型具有共同的优缺点: 都能与实验数据很好地拟合, 都有计算速度极慢、不便于应用的严重缺点。有趣的是, 本文证明了出处不同、貌似相异的 Rabotnov 模型和四参数分数微积分模型却原来是等价的。本文对我们提出的分数指数模型进行了热力学的讨论, 给出了热力学对模型参数的限制。从应用上看: 分数指数模型不仅计算速度很快, 而且与 Rabotnov 模型和分数微积分模型一样可以和真实材料的性能实验很好地拟合。从理论

上看: 它能满足热力学加于它的限制; 蠕变和松弛函数具有类似形式; 并且可通过数值计算适当选择参数的办法做到使它们的 Stieltjes 卷积为单位阶跃函数, 从而是自相协调的。在物理非线性粘弹性问题的求解中^[5], 就需要同时用到同一种材料的自相协调的松弛模量和蠕变柔量。

2 Rabotnov 模型和分数微积分模型的等价性

只讨论单轴应力状态的本构关系。作适当符号代换同样适合于三维畸变和体变方程。

2.1 Rabotnov 模型^[3]

Rabotnov 模型的松弛型本构方程为具有弱奇异核的第二类 Volterra 积分方程

$$s = E_0 [e(t) - (1 - \frac{E_\infty}{E_0}) \int_0^t b_1 E_a(-b_1, t-t) e(t) dt] \quad (1)$$

$$E_a(-b_1, t) = t^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b_1)^n t^{n(1-a)}}{\Gamma[(n+1)(1-a)]}$$

$$\int_0^t b_1 E_a(-b_1, t-t) dt = \begin{cases} 0, & t=0, \\ 1, & t>0. \end{cases}$$

$E_a(-b_1, t)$ 为 Rabotnov 核, $b_1 > 0, 1 > a > 0$, 为材

收稿日期: 2000-04-03; 修改日期: 2000-12-20

基金项目: 教育部首届青年骨干教师项目(GG-130-10530-1021), 湖南省教育厅重点项目(99C122)资助, 湖南省教育厅项目(01C083)资助

作者简介: 张为民(1968), 男, 湖南醴陵人, 副教授, 硕士, 基础力学与材料工程研究所在读博士生, 主要从事力学研究

张淳源(1934), 男, 湖南醴陵人, 教授, 《物理化学力学进展》副主编, 主要从事力学研究

料常数, E_0 和 E_∞ 为瞬时和长期松弛模量, 可由松弛实验确定。以 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}(t)$, $\mathbf{q}(t)$ 为单位阶跃函数, 代入上式, 便得到松弛模量:

$$E(t) = E_0 \left[1 - \left(1 - \frac{E_\infty}{E_0} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathbf{b}_1^{n+1} t^{(n+1)(1-a)}}{\mathbf{G}[(n+1)(1-a)+1]} \right] \quad (2)$$

2.2 分数微积分模型^[4]

分数微积分模型的本构方程为:

$$\mathbf{s}(t) + \mathbf{b}_1^{-1} D^g[\mathbf{s}(t)] = E_\infty \mathbf{e}(t) + E_0 \mathbf{b}_1^{-1} D^g[\mathbf{e}(t)] \quad (3)$$

式中分数阶导数定义为

$$D^g[f(t)] = \frac{1}{\mathbf{G}(1-g)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(t-\tau)}{\tau^g} d\tau, \quad 0 < g < 1$$

以 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}(t)$ 代入上式, 采用 Laplace 变换方法, 注意到 $\mathcal{L}\{D^g[E(t)]\} = p^g E^*(p)$, 不难求得松弛模量如下:

$$E(t) = E_0 \left[1 - \left(1 - \frac{E_\infty}{E_0} \right) L^{-1} \left(\frac{1}{[1 + \mathbf{b}_1^{-1} p^g] p} \right) \right] \quad (4)$$

Bagley 等采用复变函数的留数定理计算式中的 Laplace 逆变换, 然后将结果代入上式得:

$$E(t) = E_0 \left[1 - \left(1 - \frac{E_\infty}{E_0} \right) \cdot \left(1 - \int_0^\infty \frac{u^{g-1} \sin \mathbf{p} \mathbf{g} e^{-u \mathbf{b}_1^{1/g}}}{(1 + 2u^g \cos \mathbf{p} \mathbf{g} + u^{2g}) \mathbf{p}} du \right) \right], \quad t \geq 0 \quad (5)$$

2.3 Rabotnov 模型与分数微积分模型等价性的证明

比较式(2)、(4)和(5)可见, 要证明 Rabotnov 模型与分数微积分模型等价只需证明:

$$L^{-1} \left(\frac{1}{[1 + \mathbf{b}_1^{-1} p^g] p} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathbf{b}_1^{n+1} t^{(n+1)(-a)}}{\mathbf{G}[(n+1)(1-a)+1]}$$

与 Bagley 等的反演方法不同, 我们采用展开成级数, 再逐项反演的方法来证明上式:

$$\begin{aligned} & L^{-1} \left(\frac{1}{[1 + \mathbf{b}_1^{-1} p^g] p} \right) \\ &= L^{-1} \frac{(\mathbf{b}_1^{-1/g} p)^{-g}}{p} \frac{1}{[1 + (\mathbf{b}_1^{-1/g} p)^{-g}]} \\ &= L^{-1} \frac{(\mathbf{b}_1^{-1/g} p)^{-g}}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mathbf{b}_1^{-1/g} p)^{-ng} \\ &= L^{-1} \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathbf{b}_1^{n+1} p^{-g(n+1)} \\ &= L^{-1} \frac{1}{p} * L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathbf{b}_1^{n+1} p^{-g(n+1)} \\ &= \mathbf{q}(t) * \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathbf{b}_1^{n+1} \frac{t^{g(n+1)-1}}{\mathbf{G}[g(n+1)]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathbf{b}_1^{n+1} \int_0^t \frac{t^{g(n+1)-1}}{\mathbf{G}[g(n+1)]} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathbf{b}_1^{n+1} t^{g(n+1)}}{\mathbf{G}[g(n+1)+1]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathbf{b}_1^{n+1} t^{(n+1)(1-a)}}{\mathbf{G}[(n+1)(1-a)+1]} \end{aligned}$$

上述等式表明, 两种模型确实是等价的。

3 热力学对粘弹性流变模型的限制

作为真实材料的模型必须遵从热力学基本定律。Christensen^[6]曾对线粘弹性体的本构关系进行过热力学推导。基于热力学第一和第二定律, 从非负耗散能率、非负内力功率及衰退记忆假设出发得到对各向同性粘弹性材料单轴受力松弛模量和蠕变柔量的限制如下:

$$\begin{aligned} E(t) &\geq 0, & \frac{\partial E(t)}{\partial t} &\leq 0, & \frac{\partial^2 E(t)}{\partial t^2} &\geq 0; \\ D(t) &\geq 0, & \frac{\partial D(t)}{\partial t} &\geq 0, & \frac{\partial^2 D(t)}{\partial t^2} &\leq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

可见, 非负耗散能率、非负内力功率及衰退记忆假设对各向同性粘弹性材料的松弛模量和蠕变柔量有如下限制:

要求松弛模量从 $E_0 \geq 0$ 开始, 单调下降到趋于一个较低的水平渐近线的值 $E_\infty \geq 0$ 。要求蠕变柔量从 $D_0 \geq 0$ 开始, 单调上升到一个较高的渐近线的值 $D_\infty \geq 0$ 。此外, 所有真实材料的实验数据表明: 在 $t=0$ 瞬时的松弛模量和蠕变柔量对时间的偏导数均具有奇异性:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial E}{\partial t} = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial D}{\partial t} = \infty \quad (7)$$

只有同时满足式(6)、(7)的流变模型才能准确地描述真实材料的性能。

4 分数指数模型^[1]

线粘弹性材料的本构关系可以写为松弛型

$$\mathbf{s}(t) = E(t) * \mathbf{d}\mathbf{e}(t) = \int_{-\infty}^t E(t-\tau) \mathbf{d}\mathbf{e}(\tau) \quad (8)$$

或蠕变型

$$\mathbf{e}(t) = D(t) * \mathbf{d}\mathbf{s}(t) = \int_{-\infty}^t D(t-\tau) \mathbf{d}\mathbf{s}(\tau) \quad (9)$$

式中的积分为 Stieltjes 卷积。不考虑初应力和初应变时, 积分下限可写为 0^- 。一个能够与各种真实粘弹性固体材料性能数据相拟合的、简单实用的流变模型的松弛模量和蠕变柔量, 除了满足上节的限制条件外, 还应该是一个关于时间的、具有适当多参数的封闭解析式。在 Rabotnov 分数指数核的启发下, 我们曾提出下述松弛模量和蠕变柔量的分数指

数模型表达式。下面我们将讨论热力学对该模型的各个参数加予的限制。

4.1 分数指数模型的松弛模量解析表达式

$$E(t) = E_0 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{E_\infty}{E_0} \right) \left[1 - e^{-b_1(g+a)t^{1-a}} \right] \right\} \quad (10)$$

$$= E_\infty + (E_0 - E_\infty) e^{-b_1(g+a)t^{1-a}}, \quad t \geq 0$$

式中的五个参数： a, b_1, g, E_0, E_∞ 可通过拟合松弛实验曲线确定。

我们来讨论上节的限制条件式(6)_{1,2,3} 加于五个参数的限制。将式(6)₁用于式(10)，注意到式中的指数函数不论其幂指数是正还是负均为正值，而且当 $t > 0$ 时，只要其幂指数本身是有意义的，其值在零与一之间。于是要求

$$E_\infty \geq 0, \quad E_\infty + (E_0 - E_\infty) = E_0 \geq 0,$$

$$e^{-b_1(g+a)t^{1-a}} \geq 0, \quad t \geq 0$$

为了上式中第三式在 $t = 0$ 时有意义，上述要求可以改写为

$$E_\infty \geq 0; \quad E_0 \geq 0; \quad b_1 < \infty; \quad (g+a) < \infty; \quad a \neq 1 \quad (11)$$

若上式被满足，则 $E(0) = E_0$ 为瞬时（玻璃态）模量。式(6)₂要求：

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t) = -\{b_1[(g+a)]^{1-a} (1-a) \cdot (E_0 - E_\infty) t^{-a} e^{-b_1(g+a)t^{1-a}}\} \leq 0, \quad t \geq 0$$

于是，只要上式大括号中各项乘积因子均大于等于零，就可以满足式(6)₂的要求，其中与式(11)不重复的要求为：

$$b_1 \geq 0; \quad 1-a \geq 0; \quad (g+a)^{1-a} \geq 0; \quad E_0 \geq E_\infty; \quad t^{-a} \geq 0$$

从而

$$E_0 \geq E_\infty; \quad b_1 \geq 0; \quad a \leq 0; \quad (g+a) \geq 0 \quad (12)$$

式(6)₃要求：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E(t) = b_1(g+a)^{1-a} (1-a)(E_0 - E_\infty) [a t^{-a-1} + b_1(g+a)^{1-a} (1-a) t^{-2a}] e^{-b_1(g+a)t^{1-a}} \geq 0, \quad t \geq 0 \quad (13)$$

$$a t^{-a-1} + b_1(g+a)^{1-a} (1-a) t^{-2a} \geq 0$$

式(7)₁要求

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} E(t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} -\{b_1[(g+a)]^{1-a} (1-a)(E_0 - E_\infty)\} \cdot t^{-a} = -\infty$$

从而必须有

$$a > 0 \quad (14)$$

结合式(11)、(12)、(13)和(14)的结果，最后得到结论：当采用下述范围的五个参数时可以满足热力学要求式(6)_{1,2,3}以及式(7)₁。

$$0 < a < 1, \quad \infty > b_1 > 0, \quad \infty > g > -a, \quad E_0 \geq E_\infty \geq 0 \quad (15)$$

从式(10)可见，若上式被满足，则 $E(\infty) = E_\infty$ 为长期(橡胶态)模量。

4.2 分数指数模型的蠕变柔量解析表达式

$$D(t) = D_0 \left\{ 1 + \left(\frac{D_\infty}{D_0} - 1 \right) \left[1 - e^{-b[(g+a)t^{1-a}} \right] \right\} \quad (16)$$

$$= D_\infty - (D_\infty - D_0) e^{-b[(g+a)t^{1-a}]}, \quad t \geq 0$$

式中的五个参数： a, b, g, D_0, D_∞ 可通过拟合蠕变实验曲线确定。

现在来讨论上节的限制条件式(6)_{4,5,6} 和式(7)₂ 加于五个参数的限制。由于式(16)与式(10)的相似性，略去推导细节。注意到两式的一阶和二阶偏导数均相差一个符号，采用完全类似的方法不难得到与式(15)相类似的结论：当采用下述范围的五个参数时可以满足热力学要求式(6)_{4,5,6} 以及式(7)₂。

$$0 < a < 1, \quad \infty > b > 0, \quad \infty > g > -a, \quad D_\infty \geq D_0 \geq 0 \quad (17)$$

从式(16)可见，若上式被满足，则 $D(0) = D_0 = 1/E_0$ 为瞬时(玻璃态)柔量， $D(\infty) = D_\infty = 1/E_\infty$ 为长期(橡胶态)柔量。

4.3 分数指数模型的复模量

设给定应变为简谐振荡函数 $e = e_0 e^{i\omega t}$ ，式中 e_0 为应变幅度， ω 为频率。以此式和松弛模量式(10)代入本构方程式(8)后，化简得

$$s(t) = E_\infty e_0 e^{i\omega t}$$

$$+ i\omega e_0 \int_{-\infty}^t (E_0 - E_\infty) e^{-b_1[(1+a)(t-t')]^{1-a}} e^{i\omega t'} dt'$$

$$= \{E_\infty + \omega \int_0^\infty \sin \omega x (E_0 - E_\infty) e^{-b_1[(1+a)x]^{1-a}} dx\} e_0 e^{i\omega t}$$

$$+ i\omega \int_0^\infty \cos \omega x (E_0 - E_\infty) e^{-b_1[(1+a)x]^{1-a}} dx\} e_0 e^{i\omega t}$$

$$= E^*(i\omega) e_0 e^{i\omega t}$$

式中复模量 $E^*(i\omega)$ 的实部 $E'(i\omega)$ 为存储模量，虚部 $E''(i\omega)$ 为损耗模量，都是频率的函数。

$$E^*(i\omega) = E'(i\omega) + iE''(i\omega) \quad (19)$$

$$E'(i\omega) = E_\infty + \omega \int_0^\infty \sin \omega x (E_0 - E_\infty) e^{-b_1[(1+a)x]^{1-a}} dx \quad (20)$$

$$E''(i\omega) = \omega \int_0^\infty \cos \omega x (E_0 - E_\infty) e^{-b_1[(1+a)x]^{1-a}} dx \quad (21)$$

稳态简谐应变落后应力一个相位角 j ，损耗系数 $h = \tan j$ 等于复模量虚部与实部之比。

$$\tan j = \frac{\omega \int_0^\infty \cos \omega x (E_0 - E_\infty) e^{-b_1[(1+a)x]^{1-a}} dx}{E_\infty + \omega \int_0^\infty \sin \omega x (E_0 - E_\infty) e^{-b_1[(1+a)x]^{1-a}} dx} \quad (22)$$

损耗系数正比于每一个循环的能量耗散。前述热力学对模型参数的限制(式(15))保证了 $E_\infty \geq 0, E_0 - E_\infty \geq 0$ 和幂指数 $b_1[(1-a)x]^{1-a} \geq 0$ 。从而两个积分中的被积函数是幅度按指数函数单调衰减的余弦和正弦函数,每一循环中正的曲线内的面积永远大于负的曲线内的面积,从而式(22)的分子和分母对于所有频率均为正值。这样,热力学的限制确保了损耗系数为正,使得分数指数模型具有良好的性能。

5 分数指数模型的应用实例

定义相对蠕变柔量和相对松弛模量分别为 $D^g(t) = D(t) / D_0$ 和 $E^g(t) = E(t) / E_0$ 。图 1 和图 2 中的圆点分别为龄期为 180 天 C15 混凝土的压缩蠕变和松弛实验结果* 粗实线分别为本文模型的相对蠕变柔量曲线(式(16))和相对松弛模量曲线(式(10)), 式中取 $a = 0.58, g = 1, b = 0.128d^{a-1}, b_1 = 0.216d^{a-1}, D_0 = 1/E_0 = 4.682 \times 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}, D_\infty = 1/E_\infty = 2.2D_0, d$ 为天数; 细实线分别为标准线性体的蠕变曲线(式(23))和松弛曲线(式(24)), 并取相同的 D_0 与 D_∞ 值, $k = 1.2, I = 0.0055 d^{-1}$ 。从图 1 和图 2 可以看出用本文模型采用同一组参数可以使在整个蠕变过程和整个松弛过程中同时与实验结果吻合得非常好, 而标准线性体(其相对蠕变柔量和相对松弛模量为下两式)在整个蠕变和整个松弛过程中不能与实验结果很好吻合, 特别是蠕变和松弛的初期。

$$D^r(t) = \frac{D(t)}{D_0} = [1 + \frac{D_\infty - D_0}{D_0} (1 - e^{-I t})] \quad (23)$$

$$E^r(t) = \frac{E(t)}{E_0} = [1 - \frac{E_0 - E_\infty}{E_0} (1 - e^{-I(1+k)t})] \quad (24)$$

我们的数值计算表明, 本文提出的松弛模量和蠕变柔量解析式不仅具有类似的形式, 而且可以做到松弛模量与蠕变柔量满足下式的要求(图 3):

$$E * dD = D * dE = q(t) \quad (25)$$

式中 $q(t)$ 为单位阶跃函数。为了满足式(25)可以在实际计算中, 通过数学 CAD 的数值计算, 调整我们得到的经验公式 $b \approx b_1(E_\infty/E_0) + d$ 中的 d 即可。

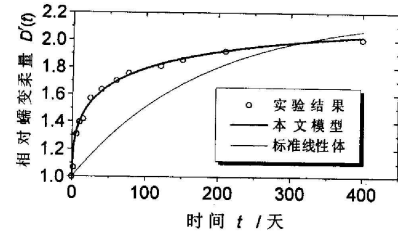


图 1 本文模型(粗实线)和标准线性体(细实线)的相对蠕变柔量曲线与实验的比较

Fig. 1. The comparison of relative creep compliance curves among present model (thick solid line), standard linear body

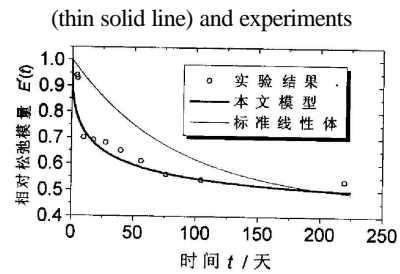


图 2 本文模型(粗实线)与标准线性体(细实线)的相对松弛模量曲线与实验的比较

Fig. 2. The comparison of relative relaxation modulus curves among present model (thick solid line), standard linear body

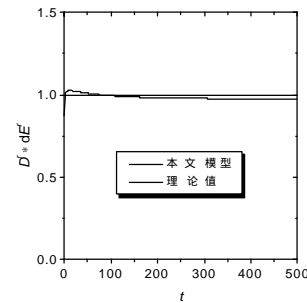


图 3 $D^r * dE^r$ 近似为单位阶跃函数 $q(t)$

Fig. 3. Approximate $D^r * dE^r$ to unit-step function $q(t)$

图 4 中的圆点为腈橡胶 1479 在不同频率下的存储模量的动态实验结果^[4], 粗实线为本文模型的存储模量曲线(式(20)); 菱形为腈橡胶 1479 在不同频率下的损耗模量的实验结果, 细实线为本文模型的损耗模量曲线(式(21)). 取 $a = 0.64, b_1 = 47.5s^{a-1}, g = 1, E_0 = 9 \times 10^8 \text{ Pa}, E_\infty = 1.5 \times 10^7 \text{ Pa}$ 。腈橡胶是一种丙烯腈(38%)与丁二烯(62%)的共聚物, 并有添加物, 主要是二氧化硅非黑填充物。数据是在应变水平为 5×10^{-4} 到 5×10^{-3} 测定的。实验结果主要是通过从转变区得到的数据确定的。从图 4 可见, 本文模型可以在很宽广的频率范围内同时很好地模拟

* 金学龙, 惠荣炎. 柘溪大坝混凝土受压徐变试验报告, 中国科学院水利水电部水利水电研究所(1962)

真实材料的存储模量和损耗模量。

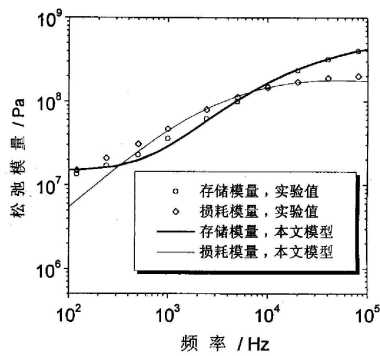


图4 本文模型用于模拟腈橡胶 1479(10°C)的动态性能

Fig. 4. Dynamic property of Nitrile rubber 1479 (10°C) by using present model

6 结论

一个能描述真实材料的、工程实用的粘弹性固体模型必须遵从热力学基本定律，能够与大多数真实材料的静力和动力实验很好吻合，形式简单，自相协调，计算速度快。计算与实验结果比较表明，常用的标准线性体，在蠕变和松弛的初期不能与实验结果很好吻合，而 Rabotnov 模型和分数微积分模型虽然能与实验结果吻合得很好，但其收敛速度太慢。我们提出的分数指数模型则能完全满足上述要求，可以广泛应用于线性或非线性^[5]粘弹性工程实际问题的计算之中。

参考文献：

- [1] 张为民. 松弛模量与蠕变柔量的实用表达式[J]. 湘潭大学自然科学学报. 1999; 21(3): 26-28.
ZHANG Wei-min. Practical expressions of relaxation modulus and creep compliance[J]. Natural Sci. J. of Xiangtan University, 1999, 21(3): 26-28.(in Chinese)
- [2] 张淳源. 粘弹性断裂力学 [M]. 武昌: 华中理工大学出版社, 1994.
ZHANG Chun-yuan. Viscoelastic fracture mechanics[M]. Wuchang: Huazhong Univ. of Sci. and Tech. Press, 1994.
- [3] Yu N Rabotnov. Elements of Hereditary Solid Mechanics [M]. Moscow: Mir Publishers, 1980.
- [4] R L Bagley and P J Torvik. On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior [J]. J. of Rheology, 1986, 30(1): 133-155.
- [5] 张淳源, 张为民. 非线性粘弹性本构理论中的弹性回复对应原理[J]. 湘潭大学自然科学学报. 建校 40 周年暨创刊 20 周年特刊, 1998, 20(3): 59-65.
ZHANG Chun-yuan, ZHANG Wei-min. Elasticity recovery correspondence principle in nonlinear viscoelastic constitutive theory[J]. Natural Sci. J. of Xiangtan University, 1998, 20(3): 59-65.(in Chinese)
- [6] R M Christensen. Theory of Viscoelasticity [M]. New York: Academic, 1971.

THERMODYNAMIC ANALYSIS AND APPLICATION OF FRACTIONAL EXPONENTIAL MODEL

ZHANG Wei-min , ZHANG Chun-yuan

(Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105)

Abstract: In this paper, the equivalence of two classical viscoelastic models for solids is proved and the shortcomings of these models are pointed out. The restrictions of thermodynamics upon parameters of the fractional exponential model^[1] are given. It is shown by the comparison of calculations and experiments that since the model contains proper parameters, the model can simultaneously fit the experimental data of the creep and the relaxation processes of the same material with high accuracy by using the same set of parameters; the Stieltjes convolution of the creep compliance and the relaxation modulus of the model can equal the unit-step function approximately and in considerable wide frequency range the model can fit the storage modulus and the dissipation modulus very well. Since it has the advantage of high calculating speed and it can fit the experimental results of most real materials, the model can be widely used in the analysis of static or dynamic viscoelastic problems in engineering.

Key words: viscoelastic solids; rheological model; fractional exponential model; relaxation modulus; creep compliance