

文章编号：1000-4750(2003)05-0095-05

# 一种计算指定截面内力影响线的简便方法

吴 晖

(兰州铁道学院 土木建筑学院, 甘肃 兰州 730070)

**摘 要：**利用功的互等原理和局部坐标系下梁单元的刚度方程，推导建立了一种用矩阵位移法计算杆系结构指定截面内力影响线的简便而统一的方法。按照这种方法，只须在结构上施加一组虚拟荷载，进行一次静力求解即可得到指定截面的内力影响线。这种方法特别适用于大型杆系结构指定截面内力影响线的计算。

**关键词：**固体力学；计算方法；理论推导；内力影响线；虚拟荷载

**中图分类号：**O342      **文献标识码：**A

## A SIMPLE AND EFFICIENT COMPUTATION METHOD FOR INFLUENCE LINES OF INTERNAL FORCES AT SPECIFIED SECTIONS

WU Hui

(College of Civil Engineering and Architecture, Lanzhou Railway Institute, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** By using the principle of reciprocal work and the stiffness equation of the beam element in its local coordinate system, a simple and efficient method for construction of influence lines for internal forces at specified sections is established. By applying a set of virtual concentrated loads to the structure and performing a static solution once only, the desired influence line can be obtained. The main advantage of the present method lies in its high efficiency, which is especially true when calculating the influence lines for internal forces at some specified sections of large frame structures.

**Key words:** solid mechanics; computational method; theoretical derivation; influence lines of internal forces; virtual load

### 1 引言

用矩阵位移法在计算机上计算杆系结构内力影响线的最直接的方法就是把单位移动荷载逐次施加在它所经过的各个结点上并逐次进行静力求解。为叙述方便，我们把这种方法称为逐点加载法。逐点加载法的主要优点是思路简单，并可同时给出所有杆单元两端截面上的内力影响线。但对包含几百个甚至几千个杆单元的大型结构，首先需要计算的往往只是若干个控制截面上的内力影响线。在这

种情况下，采用逐点加载法所需的计算工作量是很大的，显然很不经济。

利用功的互等原理和局部坐标系下梁单元的刚度方程，推导建立了一种指定截面内力影响线的简便计算方法：只须在结构上施加一组虚拟荷载，进行一次静力求解即可得到指定截面的内力影响线。因而，我们把这种方法称为计算指定截面内力影响线的虚拟荷载法。本文方法用于计算大型结构指定截面内力影响线时，可显著节约计算工作量。

## 2 局部坐标系下空间梁单元的基本关系式

局部坐标系下的单元结点位移和单元结点力分别记为  $\bar{u}^e$  和  $F^e$ , 单元结点位移分量  $\bar{d}_r^e$  和相应单元结点力分量  $F_r^e$  ( $r=1,2,\dots,12$ ) 的正方向如图 1 所示。 $e$  号梁单元轴线上任一点处沿  $x,y,z$  轴方向的线位移记为  $u=[u \ v \ w]^T$ , 则

$$u = H\bar{u}^e \tag{1}$$

其中形函数矩阵  $H$  的具体表达式见<sup>[1]</sup>。

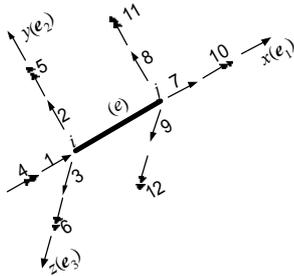


图 1 局部坐标系下的梁单元

Fig.1 Beam element in its local coordinate system

单元内部无跨间荷载时,  $e$  号梁单元的刚度方程为:

$$F_r^e = \sum_{s=1}^{12} K_{rs}^e \bar{d}_s^e \quad (r=1,2,\dots,12) \tag{2}$$

其中  $K_{rs}^e$  为局部坐标系下梁单元刚度矩阵  $K^e$  的  $r$  行  $s$  列元素, 其表达式见<sup>[1]</sup>。

设在单元轴线上点  $x$  处作用有集中荷载  $P_x, P_y$  和  $P_z$ , 它们均以局部坐标系的坐标轴正向为正。在此情形下的单元刚度方程为:

$$F_r^e = \sum_{s=1}^{12} K_{rs}^e \bar{d}_s^e + R_r^e \quad (r=1,2,\dots,12) \tag{3}$$

显然,  $R_r^e$  即由上述跨间集中荷载引起的两端固定梁的固端反力。 $R_r^e$  也以局部坐标系坐标轴正向为正, 即图 1 中所示的方向。 $R_r^e$  的表达式如下:

$$R_1^e = H_1(x)(-P_x), \quad R_7^e = H_7(x)(-P_x) \tag{4}$$

$$\begin{cases} R_2^e = H_2(x)(-P_y), & R_6^e = H_6(x)(-P_y) \\ R_8^e = H_8(x)(-P_y), & R_{12}^e = H_{12}(x)(-P_y) \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} R_3^e = H_3(x)(-P_z), & R_5^e = H_5(x)(-P_z) \\ R_9^e = H_9(x)(-P_z), & R_{11}^e = H_{11}(x)(-P_z) \end{cases} \tag{6}$$

其中  $H_r(x)$  的表达式见<sup>[1]</sup>。因两端固定梁在上述跨间集中荷载作用下并不引起固端扭矩, 故  $R_4^e = R_{10}^e = 0$ 。关系式(4)~ (6)的详细推导见文献<sup>[2]</sup>和<sup>[3]</sup>。

## 3 指定截面内力影响线的计算原理

所讨论的结构系统记为  $S$ , 选定整体坐标系  $\bar{oxyz}$ , 如图 2 所示, 其中  $\bar{y}$  轴正方向铅直向上。单位移动荷载铅直向下, 记为  $\bar{P}_0(Q)$ ,  $Q$  为移动荷载作用点。以下, 凡字母上方带“-”的量均指整体坐标系下的量, 否则指局部坐标系下的量。

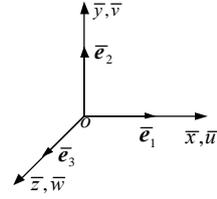


图 2 整体坐标系

Fig.2 Global coordinate system

计算指定截面的内力影响线可视为计算局部坐标系下某单元  $i$  端截面或  $j$  端截面上的内力影响线, 也就是计算该单元的某一结点力的影响线。

下面讨论计算局部坐标系下  $e$  号梁单元的单元结点力  $F_r^e$  的影响线的方法。

考虑以下两组荷载和相应的结构位移。第一组荷载取为作用在点  $Q$  处的单位竖向移动荷载  $\bar{P}_0(Q)$ , 它产生的  $e$  号梁单元在整体坐标系下的两端结点位移记为:

$$\begin{cases} \bar{u}_{i,Q}^e = [\bar{d}_{1,Q}^e \ \bar{d}_{2,Q}^e \ \dots \ \bar{d}_{6,Q}^e]^T \\ \bar{u}_{j,Q}^e = [\bar{d}_{7,Q}^e \ \bar{d}_{8,Q}^e \ \dots \ \bar{d}_{12,Q}^e]^T \end{cases} \tag{7}$$

第二组荷载的取法如下, 记

$$\begin{cases} \bar{f}_i^e = [K_{r1}^e \ K_{r2}^e \ \dots \ K_{r6}^e]^T \\ \bar{f}_j^e = [K_{r7}^e \ K_{r8}^e \ \dots \ K_{r12}^e]^T \end{cases} \tag{8}$$

并令

$$\begin{cases} \bar{f}_i^e = -\bar{E}^T \bar{f}_i^e \\ \bar{f}_j^e = -\bar{E}^T \bar{f}_j^e \end{cases} \tag{9}$$

其中

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} \bar{e} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{e} \end{bmatrix} \quad \bar{e} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \tag{10}$$

而  $I_{ij} = \bar{e}_i^T \cdot \bar{e}_j$  ( $i, j=1,2,3$ )。

第二组荷载即作用在  $e$  号梁单元  $i$  端结点上的结点荷载  $\bar{f}_i^e$  和作用在该单元  $j$  端结点上的结点荷载  $\bar{f}_j^e$ 。我们把这样选取的第二组荷载称为“虚拟荷载”。第二组荷载所引起的单位竖向移动荷载作用点  $Q$  沿  $\bar{y}$  轴正方向的线位移记为  $\bar{v}(Q)$ 。

因单元刚度矩阵  $K^e$  为对称阵,  $K^e$  的第  $r$  行与

$K^e$ 的第 $r$ 列相同,而 $K^e$ 的第 $r$ 列的各个刚度系数在数值上就等于在 $\bar{a}_r^e=1$ 状态下的单元结点力。因而由式(8)和式(9)可知,虚拟荷载的力学意义就是把局部坐标系下 $e$ 号梁单元在 $\bar{a}_r^e=1$ 状态下的单元结点力转换到整体坐标系下并反号后施加在该单元的两端结点上。

对以上两组荷载和相应位移应用功的互等原理<sup>[2]</sup>即得:

$$\bar{P}_0(Q)\bar{v}(Q) = (\bar{f}_i)^T \bar{a}_{i,Q}^e + (\bar{f}_j)^T \bar{a}_{j,Q}^e \quad (11)$$

把 $\bar{P}_0(Q)=-1$ 和式(9)所示的 $\bar{f}_i, \bar{f}_j$ 代入式(11)即得:

$$\bar{v}(Q) = (f_i^e)^T (\bar{E}\bar{a}_{i,Q}^e) + (f_j^e)^T (\bar{E}\bar{a}_{j,Q}^e)$$

即

$$\bar{v}(Q) = (f_i^e)^T \bar{a}_{i,Q}^e + (f_j^e)^T \bar{a}_{j,Q}^e \quad (12)$$

亦即

$$\bar{v}(Q) = K_{r,1}^e d_{1,Q}^e + K_{r,2}^e d_{2,Q}^e + \dots + K_{r,12}^e d_{12,Q}^e \quad (13)$$

其中 $\bar{a}_{i,Q}^e$ 和 $\bar{a}_{j,Q}^e$ 为单位竖向移动荷载 $\bar{P}_0=-1$ 作用在 $Q$ 点时所产生的局部坐标系下 $e$ 号梁单元的两端结点位移。应当强调指出,无论单位竖向移动荷载的作用点 $Q$ 在 $e$ 号梁单元之外还是内部,式(12)亦即式(13)永远成立。

由式(2), (3)和(13)即知,在单位竖向移动荷载 $\bar{P}_0=-1$ 作用下,局部坐标系下 $e$ 号梁单元的第 $r$ 个单元结点力 $F_r^e$ 的影响线 $h_r$ 为:

$$h_r = h_{r,f} + h_{r,R} \quad (14)$$

其中

$h_{r,f} = \bar{v}(Q)$   $Q$ 为单位荷载 $\bar{P}_0$ 所经过的一切点

$$h_{r,R} = \begin{cases} R_r^e(Q) & \text{当 } \bar{P}_0 \text{ 的作用点 } Q \text{ 在 } e \text{ 号梁单元之内} \\ 0 & \text{当 } \bar{P}_0 \text{ 的作用点 } Q \text{ 在 } e \text{ 号梁单元之外} \end{cases} \quad (15)$$

$R_r^e(Q)$ 由式(4)~(6)确定,其中 $P_x, P_y$ 和 $P_z$ 即单位竖向移动荷载 $\bar{P}_0(Q)$ 在 $e$ 号梁单元局部坐标系下的三个分量,即

$$P_x = -I_{12}, \quad P_y = -I_{22}, \quad P_z = -I_{32} \quad (16)$$

由 $h_{r,R}$ 的定义即知,若单位竖向移动荷载 $\bar{P}_0$ 的作用点经过指定截面所在单元的内部时,则弯矩影响线在指定截面处将发生角突变,而剪力影响线在指定截面处将发生跳跃。不言而喻,如果单位竖向移动荷载根本不经过指定截面所在单元的内部点,则 $h_r = h_{r,f}$ 。

实际计算时,通常只须给出所求影响线在结点处的数值。由前述计算原理即知:

若 $F_r^e$ 为弯矩或扭矩,则无论单位竖向移动荷载是否经过指定截面所在的单元内部,均有

$$h_{r,f}(Q_k) = \bar{v}(Q_k) \quad k=1,2,\dots,N \quad (17)$$

其中 $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ 为单位竖向移动荷载所经过的全体结点。

若 $F_r^e$ 为剪力(轴力),但单位竖向移动荷载并不经过指定截面所在单元的内部,则式(17)仍然成立。

若 $F_r^e$ 为 $e$ 号单元 $i$ 端剪力(轴力),且单位竖向移动荷载经过指定截面所在的单元内部,则其影响线在各结点处的值为:

$$\begin{aligned} h_r(Q_k) &= \bar{v}(Q_k) \quad k=1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,N \\ h_r(i-0) &= \bar{v}(i) \end{aligned} \quad (18)$$

$$h_r(i+0) = \bar{v}(i) + R_r^e(i)$$

其中 $\bar{v}(i)$ 为虚拟荷载作用下产生的结点 $i$ 的竖向位移, $h_r(i-0)$ 和 $h_r(i+0)$ 为剪力(轴力)影响线在结点 $i$ 处的左、右极限。

若 $F_r^e$ 为 $e$ 号单元 $j$ 端剪力(轴力),且单位竖向移动荷载经过指定截面所在单元的内部,则其影响线在各结点处的值为:

$$\begin{aligned} h_r(Q_k) &= \bar{v}(Q_k) \quad k=1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,N \\ h_r(j-0) &= \bar{v}(j) + R_r^e(j) \end{aligned} \quad (19)$$

$$h_r(j+0) = \bar{v}(j)$$

在结点设置较密时,求得指定截面内力影响线在各结点处的值通常已可满足需要。但如果需要把所得影响线加密,也是很容易的。由于 $h_{r,R}$ 的表达式是已知的,故只须给出 $h_{r,f}$ 即 $\bar{v}$ 的加密公式。对单位移动荷载 $\bar{P}_0(Q)$ 所经过的某个梁单元 $c$ 而言,加密公式为:

$$h_{r,f}(Q) = \bar{v}(Q) = \bar{e}_2^T H R \bar{a}^c \quad (20)$$

其中 $\bar{a}^c$ 为虚拟荷载作用下 $c$ 号单元两端结点在整体坐标系下的结点位移, $R$ 为坐标变换矩阵, $\bar{e}_2^T = [I_{12} \quad I_{22} \quad I_{32}]$ 。

最后指出,以上讨论未涉及支座反力影响线的计算。利用功的互等原理计算支座反力影响线的方法是众所周知的,例如可参见文献<sup>[4]</sup>。当然,如果所求支座反力影响线可看作是某个梁单元的结点力的影响线,则同样可用本文方法予以计算。

## 4 数值算例

算例:格栅的影响线

图3所示为一平面格栅(纵横梁体系),所有纵梁和横梁的轴线均位于水平面上,外荷载垂直于格栅所在平面。各纵梁的两端均为铰支承。假定横梁

的弯曲刚度与纵梁的弯曲刚度之比为 1:4；横梁的扭转刚度与其弯曲刚度之比以及纵梁的扭转刚度与其弯曲刚度之比均为 1:4。求截面  $m$  和截面  $n$  处的弯矩影响线。

取  $oxyz$  为整体坐标系，其中  $y$  轴正方向铅直向上。整体坐标系下格栅中每个不受约束的结点处仅有 3 个不为零的位移参数，即沿  $y$  轴正方向的线位移  $\bar{v}$ ，绕  $x$  轴正方向的截面转角  $\bar{q}_x$  和绕  $z$  轴正方向的截面转角  $\bar{q}_z$ ，见图 4。

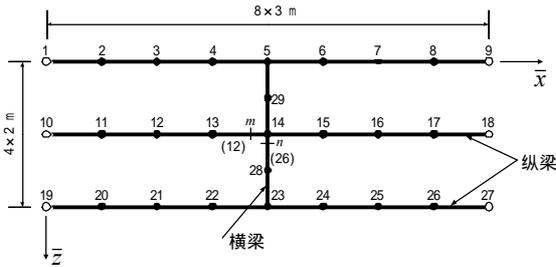


图 3 格栅及其单元划分  
Fig.3 A grid structure and its element division

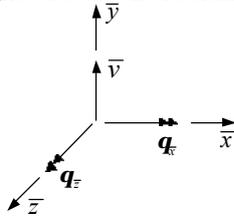


图 4 格栅的整体坐标系  
Fig.4 Global coordinate system for the grid structure

纵梁共划分为 24 个单元，所有纵梁单元均以其小号端为单元的  $i$  端，并取其局部坐标系与整体坐标系的指向相同。横梁共划分为 4 个单元。横梁单元的局部坐标系的  $x$  轴指向  $z$  轴的负方向， $y$  轴的指向与  $y$  轴相同，见图 5。

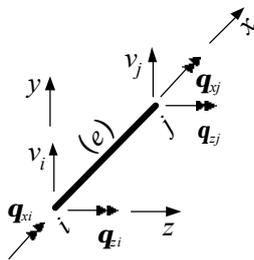


图 5 横梁单元的局部坐标系  
Fig.5 Local coordinate system for transverse beam elements

由式(2)给出的局部坐标系下  $e$  号梁单元  $j$  端弯矩与单元结点位移的关系为( $r=12$ ):

$$M_{zj}^e = \begin{bmatrix} \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{2EI_z}{l} & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \bar{a}_g^e \quad (21)$$

其中  $\bar{a}_g^e = [v_i \ q_{xi} \ q_{zi} \ v_j \ q_{xj} \ q_{zj}]^T$ ，下标  $g$  表示格栅单元。

由本文第三节关于虚拟荷载力学意义的说明可知，式(21)中的 6 个刚度系数在数值上就等于局部坐标系下  $e$  号梁单元与  $q_{zj} = 1$  状态相应的单元结点力，如图 6 所示。把图 6 所示局部坐标系下的单元结点力转换到整体坐标系并反号后施加在该单元的两端结点上，即计算  $M_{zj}^e$  的影响线所需施加的虚拟荷载。以下计算时，取纵梁的  $EI_z = 16$ ， $GJ = 4$ ；横梁的  $EI_z = 4$ ， $GJ = 1$ ，这当然并不影响所求内力影响线的数值。

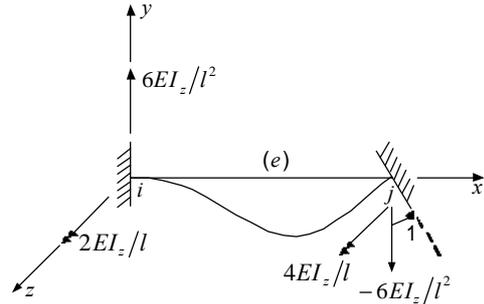


图 6 局部坐标系下由  $q_{zj} = 1$  引起的单元结点力  
Fig.6 Element nodal forces induced by  $q_{zj} = 1$  in local coordinate system

#### 4.1 截面 $m$ 处的弯矩影响线

为求截面  $m$  处的弯矩影响线，只须求局部坐标系下纵梁上 12 号单元  $j$  端截面的弯矩影响线，即只须求  $M_{zj}^{(12)}$  的影响线。由式(9)和(21)即知，所应施加的虚拟荷载为：

$$13 \text{ 号结点处: } \bar{f}_{13} = - \begin{bmatrix} 6EI_z/l^2 \\ 0 \\ 2EI_z/l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32/3 \\ 0 \\ -32/3 \end{bmatrix}$$

$$14 \text{ 号结点处: } \bar{f}_{14} = - \begin{bmatrix} -6EI_z/l^2 \\ 0 \\ 4EI_z/l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32/3 \\ 0 \\ -64/3 \end{bmatrix}$$

在以上虚拟荷载作用下所产生的格栅的竖向挠度在各结点处的数值即所求弯矩影响线在相应结点处的数值。

#### 4.2 截面 $n$ 处的弯矩影响线

为求截面  $n$  处的弯矩影响线，只须求局部坐标系下横梁上 26 号单元  $j$  端截面的弯矩影响线，即只须求  $M_{zj}^{(26)}$  的影响线。由式(9)和(21)并进行简单的坐标变换，即知所应施加的虚拟荷载为：

$$28 \text{ 号结点处: } \bar{f}_{28} = - \begin{bmatrix} 6EI_z / l^2 \\ 2EI_z / l \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$14 \text{ 号结点处: } \bar{f}_{14} = - \begin{bmatrix} -6EI_z / l^2 \\ 4EI_z / l \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

在以上虚拟荷载作用下所产生的格栅的竖向挠度在各结点处的数值即所求弯矩影响线在相应结点处的数值。

截面  $m, n$  处的弯矩影响线  $\eta_{M,m}$  和  $\eta_{M,n}$  如图 7 和图 8 所示。表 1 为部分结点上的影响线数值。

表 1 截面  $m$  与  $n$  处的弯矩影响线  $\eta_{M,m}$  和  $\eta_{M,n}$

Table 1 Influence lines for the bending moments at section  $m$  and  $n$

结点号	$\eta_{M,m}$ / $m$ ( $m$ 处)		$\eta_{M,n}$ / $m$ ( $n$ 处)	
	本文	逐点加载法	本文	逐点加载法
3	1.31823	1.31823	-0.0908339	-0.0908339
5	1.87068	1.87068	-0.132122	-0.132122
7	1.25395	1.25395	-0.0908339	-0.0908339
12	0.363518	0.363518	0.685912	0.685912
14	2.25867	2.25867	0.997691	0.997691
16	0.492143	0.492143	0.685912	0.685912
21	1.31823	1.31823	-0.595078	-0.595078
23	1.87068	1.87068	-0.865569	-0.865569
25	1.25395	1.25395	-0.595078	-0.595078

表 1 中“逐点加载法”的结果是在各结点处逐次作用单位竖向荷载  $\bar{P}_0 = -1$  时用 SAP90 计算所得结果。由表 1 可见，本文方法与“逐点加载法”所得结果完全相同。

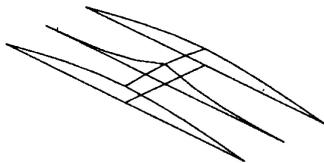


图 7 截面  $m$  处的弯矩影响线

Fig.7 Influence line for the bending moment at section  $m$

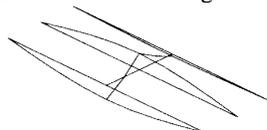


图 8 截面  $n$  处的弯矩影响线

Fig.8 Influence line for the bending moment at section  $n$

## 5 结论

与通常的“逐点加载法”相比，本文所建立的计算指定截面内力影响线的“虚拟荷载法”具有以下突出优点：

(1) 只需把虚拟荷载施加到原结构上进行一次静力求解，即可得到指定截面内力影响线。对大型杆系结构，本文方法可极大地节约计算工作量。

(2) 采用“逐点加载法”时，如需对所得影响线数值进行加密，必须减小单元尺寸，增设结点。而按照本文方法，则无需增设结点即可进行影响线加密计算，因而可用较少结点和单元获得足够密集的影响线数值。

(3) 由于在虚拟荷载作用下所产生的结构的竖向挠曲线在数值上即给出所求内力影响线(若单位移动荷载经过指定截面所在单元，则还应再叠加上该单元的固端反力影响线)，故采用本文方法时，可由计算机输出的结构变形图直接观察到所求影响线的形状。这对工程设计而言，也具有重要意义。

### 参考文献：

[1] J S 普齐米尼斯基. 矩阵结构分析理论[M]. 王德荣等译校. 北京：国防工业出版社, 1974.  
J S Przemieniecki. Theory of structural matrix analysis[M]. McGRAW-HILL Book Company, 1968.

[2] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京：科学出版社, 1981.  
Hu Haichang. Variational principles in elasticity and its applications[M]. Beijing: Science Press, 1981. (in Chinese)

[3] 吴鸿庆, 任侠. 结构有限元分析[M]. 北京：中国铁道出版社, 2000.  
Wu Hongqing, Ren Xia. Finite element analysis of structures[M]. Beijing: China Railway Press, 2000. (in Chinese)

[4] 龙驭球, 包世华. 结构力学(第二版)[M]. 北京：高等教育出版社, 1984.  
Long Yuqiu, Bao Shihua. Structural mechanics (second edition)[M]. Beijing: Higher Education Press, 1984. (in Chinese)