

文章编号 : 1000-4750(2003)05-0014-04

压电材料中反平面渗透裂纹的解

刘淑红^{1,2}, 张志国², 邹振祝^{1,2}

(1. 北方交通大学土建学院, 北京 100044; 2. 石家庄铁道学院, 石家庄 050043)

摘 要: 用复变函数的保角映射法, 采用可渗透边界条件, 研究了含裂纹的无限大压电材料在平面内电场和反平面荷载作用下的耦合场, 得到了精确的解和场强度因子以及能量释放率。结果表明, 电场强度在裂尖没有奇异性, 应变、应力、电位移具有 1/2 阶的奇异性, 能量释放率总是正的。

关键词: 压电材料; 反平面裂纹; 保角变换; 强度因子

中图分类号: O346 文献标识码: A

A SOLUTION OF A PERMEABLE MODE- CRACK IN A PIEZOELECTRIC MATERIAL

LIU Shu-hong^{1,2}, ZHANG Zhi-guo², ZOU Zhen-zhu^{1,2}

(1. Department of Civil Engineering, Northern Jiaotong University, Beijing 100044, China)

(2. Department of Mechanics and Engineering Science, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: By complex potentials, a crack embedded in an infinite piezoelectric material under a far-field antiplane mechanical load and a far-field inplane electrical load is analyzed using permeable boundary condition. A closed-form solution of stress and electric fields is obtained. It is shown that the electric field is nonsingular in front of the crack tip, while the strain intensity factor, stress and electric displacement are of 1/2 order singularity. The energy release rate is always positive.

Key words: piezoelectric material; antiplane crack; conformal mapping; intensity factor

1 引言

由于独特的力电耦合性能, 压电介质广泛地应用于智能结构中, 如传感器、致动器等。但受到力-电荷载时, 由于制造过程中产生的缺陷, 如裂纹、孔洞等, 压电介质就可能发生破坏, 因此, 压电介质的断裂力学的研究受到了广泛的重视。Pak^[1]采用 D-P 边界条件用半可逆解法研究了无限大压电材料的反平面裂纹问题, 但 Mcmeeking^[2]、Suo^[3]指出

D-P 边界条件对于很扁的裂纹会导致致命的错误, 应该采用可渗透边界条件。Zhang^[4]利用可渗透边界条件研究了含椭圆孔洞的反平面的断裂问题。本文利用可渗透边界条件, 即沿裂纹的上、下表面电位移的法向分量和电场强度的切向分量保持不变。用复变函数的方法研究了含裂纹的无限大压电材料薄板在平面内电场和反平面荷载作用下的耦合场, 得到问题的精确解。

收稿日期: 2002-03-30; 修改日期: 2002-06-30

作者简介: 刘淑红(1968), 女, 辽宁北票人, 讲师, 博士生, 从事固体力学的研究; (E-mail: lshdsj@sjzri.edu.cn)

张志国(1971), 男, 河北抚宁人, 讲师, 博士生, 从事固体力学的研究;

邹振祝(1937), 男, 山东威海人, 教授, 博士生导师, 从事固体力学的研究

2 反平面问题的基本方程和问题的解

我们所研究的问题是包含型裂纹($-a \leq x \leq a$)的无限大压电材料薄板,在无限远处承受反平面荷载和平面内电场,如图1(a)示。设位移函数 u_z 和电势 ϕ 是复数 $U(z)$ 和 $\Phi(z)$ 的虚部。

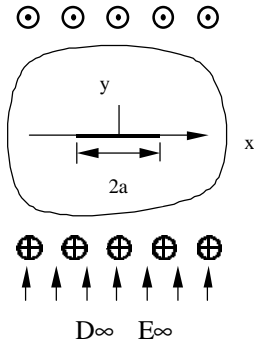


图 1(a) z 平面上承受远场机电载荷

Fig.1(a) Far-field mechanical and electrical loads in the z-plane

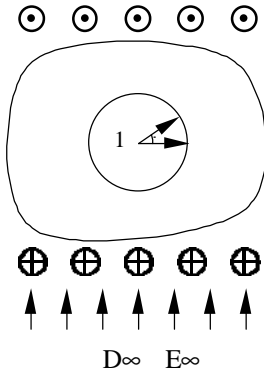


图 1(b) 裂纹变换成平面上的单位圆

Fig.1(b) Mapping the crack onto a unit circle in the z-plane

$$u_z = \text{Im } U(z), \quad \phi = \text{Im } \Phi(z) \quad (1)$$

其中 $z = x + iy$ 是复变量,应变 γ_{zi} 、电场强度 E_i 、应力 σ_{zi} 、电位移 D_i ($i = x, y$)如下表示,上撇表示对 z 求导

$$\begin{aligned} \gamma_{zy} + i\gamma_{zx} &= U'(z), \quad E_y + iE_x = \Phi'(z) \\ \sigma_{zy} + i\sigma_{zx} &= c_{44}U'(z) + e_{15}\Phi'(z) \\ D_y + iD_x &= e_{15}U'(z) - \varepsilon_{11}\Phi'(z) \end{aligned} \quad (2)$$

其中 C_{44} 、 ε_{11} 和 e_{15} 分别是通过实验测得的弹性常数、介电系数和压电系数。裂纹面上、下的边界条件为

$$\sigma_{zy} = 0, \quad D_y^+ = D_y^-, \quad E_x^+ = E_x^- \quad (3)$$

保角变换方程^[5]采用

$$z = \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (4)$$

逆变换方程是

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \quad (5)$$

这个方程把 z 平面上的裂纹变成了 ζ 平面上单位圆,裂纹的外部映射成圆心在原点的单位圆的外部,如图1(b)示。 z 平面上的裂纹问题可以变换到平面上的单位圆来解决。

平面上的复势函数根据 Pak^[6]反平面压电介质圆形夹杂的问题中式(10)选取如下

$$U(\zeta) = A_1 \zeta + \frac{A_2}{\zeta}, \quad \Phi(\zeta) = B_1 \zeta + \frac{B_2}{\zeta} \quad (6)$$

其中 A_1, A_2, B_1 和 B_2 是实数。为保证电场单值,需满足

$$\Phi(e^{i\theta}) = \Phi(e^{-i\theta}) \quad (7)$$

θ 是极角,在 ζ 平面上,边界条件(3)变为

$$\begin{aligned} \text{Im}[c_{44}U' + e_{15}\Phi']e^{i\theta} &= 0 \\ \text{Im}[e_{15}U' - \varepsilon_{11}\Phi']e^{i\theta} &= \text{Im}[e_{15}U' - \varepsilon_{11}\Phi']e^{-i\theta} \\ \text{Re}(\Phi'e^{i\theta}) &= \text{Re}(\Phi'e^{-i\theta}) \end{aligned} \quad (8)$$

从式(7)和(8),得到

$$B_1 = B_2, \quad c_{44}(A_1 + A_2) + e_{15}(B_1 + B_2) = 0 \quad (9)$$

式(8)中的后两个边界条件自然满足,系数 A_2 和 B_2 用 A_1 和 B_1 表示

$$B_2 = B_1, \quad A_2 = -A_1 - \frac{2e_{15}B_1}{c_{44}} \quad (10)$$

系数 A_1 和 B_1 可以通过远场边界条件来确定。

同 Pak^[1]的研究一样,考虑四种加载情况:(1)无限远处受均匀剪应力 $\sigma_{zy} = \sigma_{zy\infty}$ 和均匀的电位移 $D_y = D_{y\infty}$;(2)均匀的剪应变 $\gamma_{zy} = \gamma_{zy\infty}$ 和均匀的电场强度 $E_y = E_{y\infty}$;(3)均匀的剪应力和均匀的电场强度;(4)均匀的剪应变和均匀的电位移。通过远场的边界条件,系数 A_1 和 B_1 可以计算出。

第一种加载情况:

$$A_1 = \frac{a(\varepsilon_{11}\sigma_{zy\infty} + e_{15}D_{y\infty})}{2(c_{44}\varepsilon_{11} + e_{15}^2)}, \quad B_1 = -\frac{a(c_{44}D_{y\infty} - e_{15}\sigma_{zy\infty})}{2(c_{44}\varepsilon_{11} + e_{15}^2)}$$

第二种加载情况:

$$A_1 = \frac{a\gamma_{zy\infty}}{2}, \quad B_1 = -\frac{aE_{y\infty}}{2}$$

第三种加载情况:

$$A_1 = \frac{a(\sigma_{zy\infty} + e_{15}E_{y\infty})}{2c_{44}}, \quad B_1 = -\frac{aE_{y\infty}}{2}$$

第四种加载情况:

$$A_1 = \frac{a\gamma_\infty}{2}, \quad B_1 = \frac{a(e_{15}\gamma_\infty - D_\infty)}{2\varepsilon_{11}} \quad (11)$$

据式(4)、(6)得到 z 平面上的复势函数^[7]

$$U(z) = \frac{2(c_{44}A_1 + e_{15}B_1)}{ac_{44}}\sqrt{z^2 - a^2} - \frac{2e_{15}B_1z}{ac_{44}} \quad (12)$$

$$\Phi(z) = \frac{2B_1z}{a}$$

把方程(12)代入(1)和(2), 得到位移函数、电势、应变场、应力场、电场强度、电位移的精确解如下:

$$u_z = \frac{2(c_{44}A_1 + e_{15}B_1)}{ac_{44}}\sqrt{r_1r_2}\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \frac{2e_{15}B_1}{ac_{44}}r\sin\theta$$

$$\phi = \frac{2B_1}{a}r\sin\theta$$

$$\gamma_{zy} = \frac{2(c_{44}A_1 + e_{15}B_1)}{ac_{44}}\frac{r}{\sqrt{r_1r_2}}\cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \frac{2e_{15}B_1}{ac_{44}}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2(c_{44}A_1 + e_{15}B_1)}{ac_{44}}\frac{r}{\sqrt{r_1r_2}}\sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

$$E_y = -\frac{2B_1}{a}, \quad E_x = 0$$

$$\sigma_{zy} = \frac{2(c_{44}A_1 + e_{15}B_1)}{a}\frac{r}{\sqrt{r_1r_2}}\cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

$$\sigma_{zx} = \frac{2(c_{44}A_1 + e_{15}B_1)}{a}\frac{r}{\sqrt{r_1r_2}}\sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

$$D_y = \frac{2(c_{44}e_{15}A_1 + e_{15}^2B_1)}{ac_{44}}\frac{r}{\sqrt{r_1r_2}}\cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \frac{2(e_{15}^2 + \varepsilon_{11}c_{44})B_1}{ac_{44}}$$

$$D_x = \frac{2(c_{44}e_{15}A_1 + e_{15}^2B_1)}{ac_{44}}\frac{r}{\sqrt{r_1r_2}}\sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \quad (13)$$

这里 r 、 θ 、 r_1 、 θ_1 、 r_2 、 θ_2 的关系如图 2 示。从式(13)中可以看出, 在近似边界条件下, 位移函数 u_z 、电势函数 Φ 、应变 γ_{zy} 、电位移 D_y 均与 Pak 在 D-P 边界条件下的结果不同, 电场强度 E_y 在材料内是均匀的。由式(13)可以得到裂尖附近的机电场

$$\gamma_{zy} = \frac{K^S}{\sqrt{2}r_1}\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right), \quad \gamma_{zx} = -\frac{K^S}{\sqrt{2}r_1}\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$$

$$\sigma_{zy} = \frac{K^T}{\sqrt{2}r_1}\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right), \quad \sigma_{zx} = -\frac{K^T}{\sqrt{2}r_1}\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \quad (14)$$

$$D_y = \frac{K^D}{\sqrt{2}r_1}\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right), \quad D_x = -\frac{K^D}{\sqrt{2}r_1}\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$$

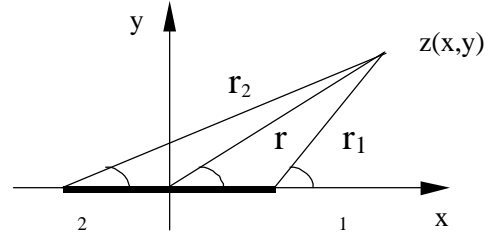


图 2 坐标变换关系

Fig.2 Relation of coordinate transformation

其中 K^S 、 K^E 、 K^T 、 K^D 分别是应变强度因子、电场强度因子、应力强度因子、电位移强度因子, 分别等于

$$K^S = \frac{2(c_{44}A_1 + e_{15}B_1)}{ac_{44}}, \quad K^E = 0$$

$$K^T = \frac{2(c_{44}A_1 + e_{15}B_1)}{a}, \quad K^D = \frac{2(c_{44}e_{15}A_1 + e_{15}^2B_1)}{ac_{44}} \quad (15)$$

从式(14)、(15)可以看出, 应变、应力、电位移在裂尖呈现 1/2 阶的奇异性, 而电场强度在裂尖没有奇异性, 这个结果与 Pak^[1]不同, Pak 的结论中应变、应力、电位移和电场强度均具有 1/2 阶的奇异性。

3 能量释放率

据 Pak^[1], 在线弹性压电材料, 与纯弹性状态一样, 能量释放效率 J 与裂尖扩展力 G 值一样, 可表示为

$$J = G = \frac{K^T K^S - K^D K^E}{2} = \frac{K^T K^S}{2} \quad (16)$$

四种加载情况下的能量释放率分别为:

$$J = \begin{cases} \frac{a(C_{44}\varepsilon_{11}\infty - e_{15}^2\infty + 2e_{15}C_{44}D_\infty)^2}{2C_{44}(C_{44}\varepsilon_{11} + e_{15}^2)^2} \\ \frac{a(C_{44}\gamma_\infty - e_{15}E_\infty)^2}{2C_{44}} \\ \frac{a^2}{2C_{44}} \\ \frac{a(C_{44}\varepsilon_{11}\gamma_\infty + e_{15}^2\gamma_\infty - e_{15}D_\infty)^2}{2C_{44}\varepsilon_{11}^2} \end{cases} \quad (17)$$

4 举例

为了便于比较, 选取了 Pak^[1]中的压电陶瓷 (PZT-5H) 进行研究, 材料参数如下:

$$C_{44} = 3.53 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad e_{15} = 17.0 \text{ C/m}^2$$

$$\varepsilon_{11} = 151 \times 10^{-10} \text{ C/Vm}, \quad J_{Cr} = 5.0 \text{ N/m}$$

其中 N 、 m 、 C 和 V 分别代表牛顿、米、库仑和伏特。

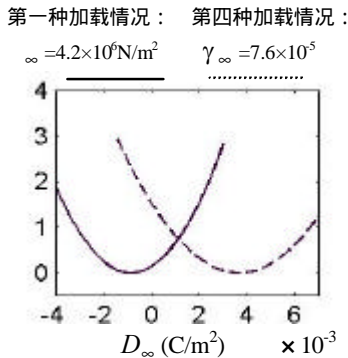


图 3 第一、四种加载情况的能量释放率

Fig.3 Energy release rate for cases 1 and 4

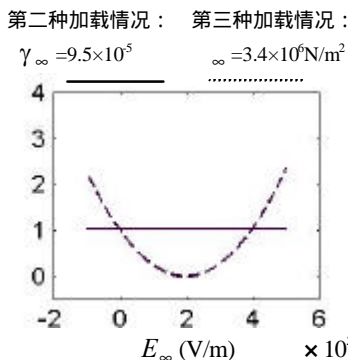


图 4 第二、三种加载情况的能量释放率

Fig.4 Energy release rate for cases 2 and 3

当力载荷固定时，裂纹长度 $2a=0.02\text{m}$ 的 PZT-5H 材料的能量释放率随电载荷变化关系如图 3 和图 4 所示。可以求出最小的能量释放率对于一、二、四种加载情况分别发生在 $D_{\infty} = -0.85 \times 10^{-3} \text{ C/m}^2$ 、 $E_{\infty} = 1.97 \times 10^5 \text{ V/m}$ 、 $D_{\infty} = 3.67 \times 10^{-3} \text{ C/m}^2$ ，第三种加载情况与电场无关。从图中可以看出，本文所得结果与 PaK^[1]有很大不同，在 PaK 的模型中，裂尖扩展力(能量释放率)可以为负值，随电荷载增加，最大的 J 达到之后，继续增加电荷载，裂尖扩展力降低，裂纹均有闭合趋势，虽未见实验报道但与常理不符。而本文的模型得出的结果，裂尖扩展力总是正的，第一、第四种加载情况下，当电荷从 0 开始增加时， J 增加还是减少取决与电荷的方向，但到

达 J_{cr} 之后，继续增加电荷载值只能使 J 增加，第三种加载情况与电荷载无关。

5 结论

根据可渗透边界条件，采用保角变换的方法，得到了含裂纹的无限大压电材料反平面问题的精确解，结果表明，

- (1) 电场强度是均匀的，在裂尖不具有奇异性，电位移、应力、应变具有 $1/2$ 阶的奇异性。
- (2) 在给定力荷载的作用下，外加电场使裂纹扩展还是闭合，取决于电场的大小、方向。
- (3) 能量释放率总是正值。

参考文献：

- [1] PAK Y E. Crack extension force in a piezoelectric material [J]. J. Appl. Mech, 1990, 57(3): 647-653.
- [2] MCMEEKING R M. Electrostrictive stresses near crack like flaws[J]. J. Appl Math Phys, 1989, 40: 615-627.
- [3] SUO Z, KUO C M, BARNETT D M, WILLIS J R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics[J]. J. Mech. Phys. Solids, 1992, 40(4):739-765.
- [4] ZHANG T Y, TONG P. Fracture mechanics for a mode crack in a piezoelectric material[J]. Int J Solids & structs, 1996, 33(3): 343-359.
- [5] 沈成康. 断裂力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1996.
Shen Chengkang. Fracture mechanics[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1996. (in Chinese)
- [6] PAK Y E. Circular inclusion problem in antiplane piezoelectricity[J]. Int J Solids & structs, 1992, 29(19): 2403-2419.
- [7] 许翥中. 弹性力学中的复变函数方法[M]. 高等教育出版社, 1989.
Xu Zhuzhong. The method of complex function in elasticity mechanics[M]. Higher Education Press, 1989. (in Chinese)