

文章编号：1000-4750(2003)01-042-06

两节点曲线索单元精细分析的非线性有限元法

杨孟刚, 陈政清

(中南大学土木建筑学院, 湖南 长沙 410075)

摘 要：从 UL 列式的虚功增量方程出发，引入索的基本假定，推导出了两节点曲线索单元切线刚度矩阵的显式；同时根据索的特性还导出了精确计算索单元索端力的表达式，从而建立起了一套完整的对拉索进行精细分析的非线性有限元法。应用本文方法，可进行大跨度悬索桥、斜拉桥以及张拉结构等的非线性有限元分析计算。算例结果表明，本文方法是精确有效的。

关键词：索支承桥；张拉结构；非线性有限元；两节点曲线索单元

中图分类号：O242.21 文献标识码：A

1 引言

随着计算机技术的发展，对拉索的计算通常采用非线性有限元进行分析。目前主要有两种方法：(1) 将拉索模拟成杆单元^[1]，并通过 Ernst 公式^[2]考虑拉索的垂度效应。该法只有在当拉索长度较短，索的拉力较大时才能保证足够的精度。(2) 将拉索模拟成多节点的曲线索单元^[3]。该法由于节点数较多，故会使得程序在进行前后处理时较复杂，而且不易得出刚度矩阵的显式，使用不便。

索在受力后会呈现很强的非线性，故其平衡方程必须建立在变形后的几何位置上。所以在进行索的非线性有限元分析时，要求具有较高精度的切线刚度阵、索端力的精确计算方法以及非线性平衡方程的有效求解途径。文献[4]给出了两节点曲线索单元的位移模式，但其推导的切线刚度阵存在一定缺陷，而且未给出计算索端力和非线性方程的求解方法。本文通过引入索的基本假定和文献[4]提出的位移模式，从 UL 列式的虚功增量方程出发，推导出了两节点曲线索单元切线刚度阵的显式；同时根据索的几何特性和物理关系，导出了计算索单元索端力的迭代表达式，运用此表达式可既简便又精确地求得变形后索单元的索端力，从而可得到至此时刻为此的节点不平衡力。最后，采用增量法与

Newton-Raphson 法相结合的双重平衡迭代法来求解有限元平衡方程，达到每一加载步上精确满足平衡方程的要求。本文方法既克服了杆单元计算精度不高的问题，又解决了多节点曲线索单元自由度多等缺点。计算算例结果表明，本文方法具有较高的精度。

2 基本假定和位移模式

2.1 基本假定

1. 索在弹性阶段工作；
2. 大位移小应变假定；
3. 索是理想柔性的，只能承受拉力而不能受压和抗弯；
4. 考虑索的自重影响，假设索的几何形状为二次抛物线。

2.2 位移模式

如图 1 所示， A 、 B 为索单元的两节点， $OXYZ$ 为结构整体坐标系， $oxyz$ 为索单元的局部坐标系，其中， x 轴为索的弦长方向， xz 为索平面， xyz 构成右手直角坐标系， u 、 v 、 w 分别为索截面沿 x 、 y 、 z 方向的位移， u_1 、 v_1 、 w_1 和 u_2 、 v_2 、 w_2 为相应的节点位移。

收稿日期：2001-07-03；修改日期：2002-02-25

基金项目：国家自然科学基金重大项目(59895410)

作者简介：杨孟刚(1976)，男，江西安义人，讲师，桥梁与隧道工程博士研究生

陈政清(1947)，男，湖南湘潭人，教授，博士，桥梁与隧道工程博士生导师

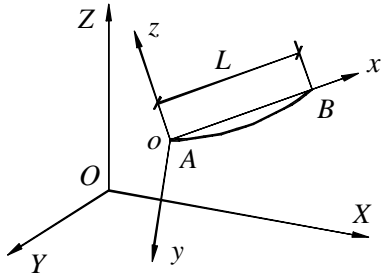


图 1 索单元的坐标系

Fig.1 Reference frame of cable element

根据抛物线假定，取索的单元位移模式如下：

$$\begin{aligned} u &= F_1 u_1 + F_2 u_2 \\ v &= F_1 v_1 + F_2 v_2 \\ w &= F_1 w_1 + F_2 w_2 - Df \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 - x/L, \quad F_2 = x/L \\ Df &= -4F_1 F_2 Df_e = -6F_1 F_2 f_e DL/L \end{aligned} \quad (2)$$

上式的推导过程见文献[5]， f_e 为索单元跨中垂度， DL 为弦长的变化量， $DL = L' - L$ ， L 和 L' 分别为索单元变形前和变形后的弦长。

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ L' &= \sqrt{(x_2 + u_2 - x_1 - u_1)^2 + (y_2 + v_2 - y_1 - v_1)^2 + (z_2 + w_2 - z_1 - w_1)^2} \end{aligned} \quad (3)$$

由上式简化可得

$$DL \approx \frac{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 + (w_2 - w_1)^2}{2L} \quad (4)$$

将式(2)、(4)代入式(1)，忽略高阶项可得索单元的位移模式

$$\{u\} = [N]\{u\}_e \quad (5)$$

式中

$$\{u\}_e = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2\}^T$$

为节点位移列向量；

$$[N] = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 & F_2 & 0 & 0 \\ 0 & F_1 & 0 & 0 & F_2 & 0 \\ -F_3 & 0 & F_1 & F_3 & 0 & F_2 \end{bmatrix}$$

为形函数。其中， F_1 和 F_2 同前， $F_3 = 6F_1 F_2 f_e / L$ 。

3 索单元的非线性平衡方程

3.1 切线刚度矩阵的推导

UL 列式法的虚功增量方程为

$$\begin{aligned} & \int_{T_V} C_{ijkl} e_{kl} d\mathbf{e}_{ij} \cdot^T dV + \int_{T_V} T \mathbf{s}_{ij} d\mathbf{h}_{ij} \cdot^T dV \\ & = {}^{T+\Delta T} R - \int_{T_V} T \mathbf{s}_{ij} d\mathbf{e}_{ij} \cdot^T dV \end{aligned} \quad (6)$$

陈政清^[6]指出，只要定义任意一种结构单元的位移模式，便可以由式(6)建立该结构单元的 UL 有限元列式。对于弹性材料，式(6)左边第一项将导出通常的弹性切线刚度阵；第二项导出几何切线刚度阵。等式右边第一项将导出 $T + \Delta T$ 时刻的等效节点荷载向量，而第二项是 T 时刻的等效节点力向量，两项合起来代表 T 到 $T + \Delta T$ 时刻实际应施加的荷载，它包括外荷载增量与尚未平衡的残余力。

本文推导了索单元切线刚度阵的显式与等效节点力向量的求解表达式。等效节点荷载的求法见文献[7]。

在大位移小应变假定下，柔性索单元的应变 \mathbf{e} 只须考虑格林应变的第一项，因此

$$\mathbf{e} = e_{11} + \mathbf{h}_{11} \quad (7)$$

由于拉索单元位于局部坐标系下的 xz 平面内，因此

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \mathbf{h}_{11} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

将式(5)代入式(8)，再代入式(6)，经推导(可用 Mathematica)后，得到索单元切线刚度矩阵为

$$[k_e] = [k_0] + [k_s] \quad (9)$$

式中 $[k_0]$ 为弹性刚度阵， $[k_s]$ 为几何刚度阵，具体形式如下：

$$[k_0] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & 0 & 0 & -\mathbf{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathbf{a}_2 & 0 & 0 & -\mathbf{a}_2 \\ & & & \mathbf{a}_1 & 0 & 0 \\ sym & & & & 0 & 0 \\ & & & & & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[k_s] = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & 0 & 0 & -\mathbf{a}_3 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & & \mathbf{a}_3 & 0 & 0 \\ sym & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= 1 - 16 \left(\frac{f_e}{L} \right)^2 + \frac{576}{5} \left(\frac{f_e}{L} \right)^4 \\ \mathbf{a}_2 &= \frac{16}{3} \left(\frac{f_e}{L} \right)^2, \quad \mathbf{a}_3 = 12 \left(\frac{f_e}{L} \right)^2 \end{aligned}$$

当不考虑垂度影响时, $\frac{f_e}{L} = 0$, 从而得到 $\mathbf{a}_1 = 1$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 = 0$, 此时索单元的切线刚度阵就自动退化为杆单元的切线刚度阵。

式(10)与文献[4]中的弹性刚度矩阵和几何刚度矩阵略有不同, 其对结构分析的影响可以从算例3中看出, 本文计算结果更接近文献[8]的解。

3.2 索端力的精细计算

如图2所示, $OXYZ$ 为结构整体坐标系, $O_1X_1Y_1Z_1$ 为索平面坐标系, Z 轴和 Z_1 轴的方向与索的自重方向始终相反, 在索平面坐标系下, 索的抛物线方程为

$$Z_1 = -\frac{4f_e X_1(l - X_1)}{l^2} + \frac{c}{l} X_1 \quad (11)$$

式中 l 为索单元水平投影长度, c 为索单元竖向投影长度, f_e 为索单元跨中垂度。

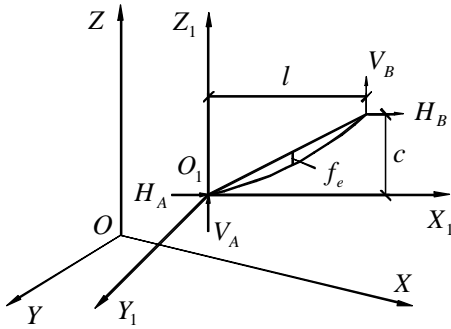


图2 索端力计算图

Fig.2 Node forces of cable element

索的切向力 T 与其水平张力 H 的关系式为

$$T = \frac{H}{\cos q} \quad (12)$$

由抛物线假定, 则有

$$H = \frac{ql^2}{8f_e} \quad (13)$$

应用胡克定律, 应变可表示为

$$\mathbf{e} = \frac{T}{EA} = \frac{H}{EA \cos q} \quad (14)$$

从而, 索的伸长可表示为

$$s - s_0 = \int_0^s \mathbf{e} ds \quad (15)$$

式中 s_0 为索的初始长度, s 为索变形后的长度。

索长的计算式为

$$s = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dZ_1}{dX_1}\right)^2} dX_1 \quad (16)$$

对于小垂度的索结构, $\left(\frac{dZ_1}{dX_1}\right)^2$ 与 1 相比是小量, 将 $\sqrt{1 + \left(\frac{dZ_1}{dX_1}\right)^2}$ 按泰勒级数展开, 取其前三项即可

达到足够的精度。此时索长的计算式可简化为

$$s = \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dZ_1}{dX_1}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{dZ_1}{dX_1}\right)^4 \right] dX_1 \quad (17)$$

将式(11)代入式(17), 积分便可得到索长为

$$s = l \left(1 + \frac{c^2}{2l^2} + \frac{8f_e^2}{3l^2} - \frac{c^4}{8l^4} - \frac{32f_e^4}{5l^4} - \frac{4c^2f_e^2}{l^4} \right) \quad (18)$$

由式(13)和(14), 得到

$$\int_0^s \mathbf{e} ds = \frac{ql^3}{8f_e EA} \left(1 + \frac{c^2}{l^2} + \frac{16f_e^2}{3l^2} \right) \quad (19)$$

将式(18)和(19)代入式(15), 便可得到

$$l \left(1 + \frac{c^2}{2l^2} + \frac{8f_e^2}{3l^2} - \frac{c^4}{8l^4} - \frac{32f_e^4}{5l^4} - \frac{4c^2f_e^2}{l^4} \right) - s_0 = \frac{ql^3}{8f_e EA} \left(1 + \frac{c^2}{l^2} + \frac{16f_e^2}{3l^2} \right) \quad (20)$$

式中 s_0 根据索在初始状态时的参数由式(18)求得, l 和 c 为变形后索单元的几何参数值, q 为索的荷载集度, EA 为抗拉刚度。

式(20)是一仅含 f_e 的方程式, 对其采用牛顿迭代进行求解, 便可算出 f_e 。最初迭代时 f_e 可取一较小值 ($f_e = 0.001$)。

求出 f_e 后, 将其代入式(13)便可得到索单元的水平张力 H , 再由索的静力平衡条件可求得索平面坐标系下索单元的索端力, 即

$$\begin{aligned} H_A &= -H; \quad H_B = H; \quad V_A = qs_0 - V_B \\ V_B &= q \left(\frac{l^2}{2} + \frac{c^2}{4} + \frac{2cf}{3} + \frac{4f^2}{3} - \frac{c^4}{16l^2} - \frac{c^3f}{3l^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2c^2f^2}{l^2} - \frac{16cf^3}{5l^2} - \frac{16f^4}{5l^2} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

上式中 V_A 、 V_B 的求解是按自重荷载 q 沿索长均布得到的, 这虽与索的抛物线假定 (q 沿索的跨度均布) 相冲突, 但如此处理后对结构分析计算则会更精确。

将式(21)写成矩阵形式

$$\{\mathbf{f}\} = \{H_A \quad 0 \quad V_A \quad H_B \quad 0 \quad V_B\}^T \quad (22)$$

3.3 非线性平衡方程的求解

经坐标变换和集总后, 即可得到整体坐标系 $OXYZ$ 下的非线性有限元增量平衡方程为

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \mathbf{T} + \mathbf{DT} \{\mathbf{F}\} - \mathbf{T} \{\mathbf{y}\} \quad (23)$$

式中

(1) $[K]$ 为切线刚度阵, $[K] = \sum [T_1]^T [k_e] [T_1]$, 其中 $[T_1]$ 为整体坐标系 $OXYZ$ 到局部坐标系 $oxyz$ 的转换矩阵, 参见文献[4];

(2) $\{U\}$ 为节点增量位移;

(3) $T^{+DT} \{F\}$ 为等效节点荷载向量, 其求法参见文献[7];

(4) $T^T \{y\}$ 为等效节点力向量。 $T^T \{y\} = [T_2]^T \{f\}$, 其中 $[T_2]$ 为整体坐标系 $OXYZ$ 到索平面坐标系 $O_1X_1Y_1Z_1$ 的转换矩阵。由于 Z 轴和 Z_1 轴的方向始终相同, 故 $[T_1]$ 中的 $n_1 = 0$, 从而得到 $[T_2]$ 。

该方程采用增量法与 Newton-Raphson 法相结合的双重平衡迭代法进行求解。求解流程如图 3 所示。

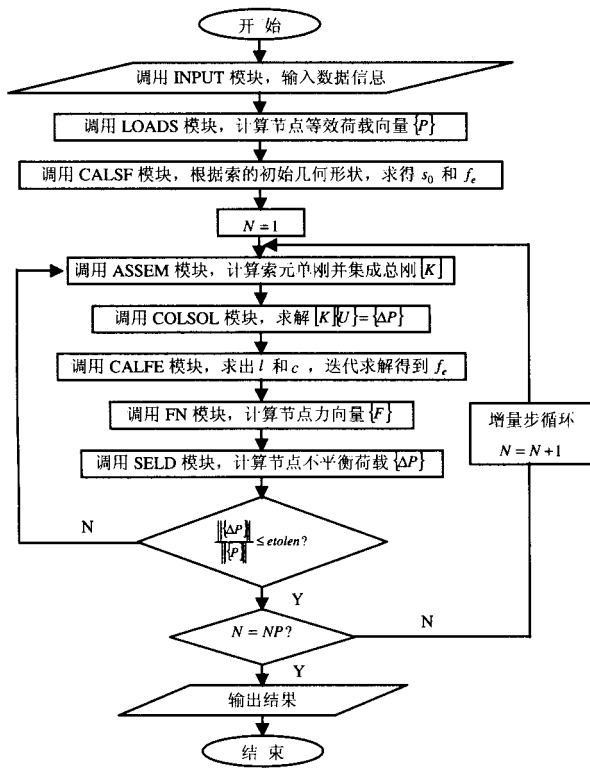


图 3 非线性方程求解流程图

Fig.3 Flow chat of solving nonlinear FEM equation

4 算例

根据上述方法, 编制了相应的程序, 并用下面三个算例作了验证。

例 1: 如图 4 所示, 一小垂度单索结构, 已知其初始水平张力为 10kN, 初始均布荷载为 0.2kN/m, 弹性模量为 $E=170\text{kN/mm}^2$, 截面积为 67.4mm^2 。计算其在终态荷载 $q=0.5\text{kN/m}$ 作用下的平衡几何状态与内力。

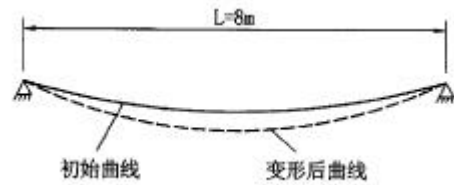


图 4 例 1 计算模型

Fig.4 Calculating model of example one

本文采用两个索单元进行分析, 计算由程序一步加载迭代 7 次完成, 计算结果见表 1。

表 1 例 1 的计算结果比较

Table 1 Comparison of example one's results

项目	文献[3]五节点 曲线元解	文献[9]四个索 单元计算结果	本文 计算结果
中点垂度/m	0.21094	0.21543	0.21095
水平张力/kN	19.004	18.527	18.955

例 2: 图 5 所示为一单索结构(虚线为变形后的曲线), 结构的弹性模量 $E=19 \times 10^6$, 截面积 $A=0.85$, 在自重均布荷载 $q=3.16$ 作用下处于初始平衡状态。计算其在一集中荷载 $P=8000$ 作用下的节点位移。

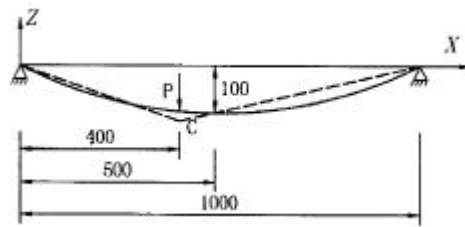


图 5 例 2 计算模型

Fig.5 Calculating model of example two

和文献[10]、[11]一样, 本文采用两个索单元进行分析, 计算由程序一步加载迭代 18 次完成, 计算结果见表 2。表中文献[1]的数值是采用十个杆单元计算得到的。

表 2 例 2 的计算结果比较

Table 2 Comparison of example two's results

C 点位移	文献[10]	文献[11]	文献[1]	本文
竖向位移	-18.458	-17.953	-17.951	-18.226
水平位移	-2.819	-2.773	-2.772	-2.804

例 3: 图 6 为集中荷载作用下两端水平支承的悬索, 跨度为 16m, 索中水平张力 $H=85.15\text{kN}$, 集中荷载的间距为 4m, 初始状态的荷载值分别为 $P_1 = P_2 = P_3 = 16\text{kN}$, 最大垂度 $f=1.503\text{m}$, 悬索的截

面积为 $A=10\text{cm}^2$ ，弹性模量为 $E=18000\text{kN/cm}^2$ 。求荷载改变为 $P_1=20\text{kN}$ ， $P_2=20\text{kN}$ ， $P_3=16\text{kN}$ 时各荷载作用点的垂度以及各索段的张力。

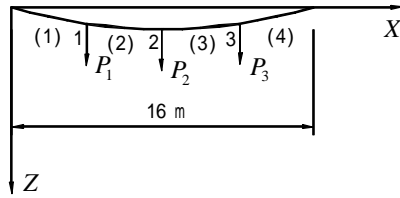


图 6 例 3 计算模型

Fig.6 Calculating model of example three

本文采用四个索单元进行分析，计算结果与其它文献比较见表 3。由于本文采用了精度更高的单元刚度矩阵以及精确求解索端力的方法，故本文计算结果较文献[4]和文献[12]更接近文献[8]的解析解。

表 3 例 3 的计算结果比较

Table 3 Comparison of example three's results

项 目	序号	文献[8]解析 解结果	文献[12]五节 点结果	文献[4] 结果	本文 结果
荷载作用点的 垂度/cm	1	116	115.70	115.84	115.85
	2	152	151.79	151.98	151.98
	3	108	108.05	108.18	108.16
索段的平均张 力/kN	(1)	104.1	104.28	104.14	104.14
	(2)	100.4	100.56	100.41	100.42
	(3)	100.6	100.75	100.68	100.62
	(4)	103.6	103.73	103.61	103.59

5 结 论

通过以上算例分析，可得到如下结论：

(1) 本文推导了两节点曲线索单元的非线性有限元分析的全套公式与算法，对文献[4]作了进一步的完善与发展。

(2) 由于本文方法精度较高，收敛较快，因此无需将索划分成太多的单元便能达到较理想的精度。

(3) 本文方法能适用于大跨度悬索桥、斜拉桥以及张拉结构等的非线性分析计算。

参考文献：

[1] W C Knudson. Static and dynamic analysis of cable net structures[D]. Doctoral disseration. University of

California, Berkely, California, 1971.

- [2] H J Ernst. Der E-Modul von Seilen unter Berücksichtigung des Durchhanges[J]. Der Bauingenieur, 1965, 40(2): 52-55.
- [3] Tang Jianmin, Shen Zuyan and Qian Ruojun. A nonlinear finite element method with five-node curved element for analysis of cable structures[J]. Proceedings of IASS International Symposium, 1995, 2: 929-935.
- [4] 袁行飞, 董石麟. 二节点曲线索单元非线性分析[J]. 工程力学, 1999, 16(4): 59-64.
- Yuan Xingfei and Dong Shilin. A two-node curved cable element for nonlinear analysis[J]. Engineering Mechanics, 1999, 16(4): 59-64.
- [5] 张其林. 预应力结构非线性分析的索单元理论[J]. 工程力学, 1993, 10(4): 93-101.
- Zhang Qilin. A cable element theory for nonlinear analysis of prestressed structures[J]. Engineering Mechanics, 1993, 10(4): 93-101.
- [6] 陈政清, 曾庆元, 颜全胜. 空间杆系结构大挠度问题内力分析的 UL 列式法[J]. 土木工程学报, 1992, 25(5): 34-44.
- Chen zhengqing, Zeng Qingyuan and Yan Quansheng. A UL formulation for internal force analysis of special frame structures with large displacement[J]. China Civil Engineering Journal, 1992, 25(5): 34-44.
- [7] 钟万勰, 丁殿明, 程耿东. 计算杆系结构力学[M]. 北京: 水利水电出版社, 1982 年.
- Zhong Wanxie, Ding Dianming and Cheng Gengdong. Structural Mechanics of Beams and Trusses [M]. Beijing: China Hydroelectricity Press, 1982.
- [8] 李著璟. 特殊结构[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988.
- Li Zhujing. Particular structures[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1988.
- [9] 唐建民, 赵引, 吴黎华. 基于欧拉描述的两节点索单元非线性有限元法 [J]. 上海力学, 1999, 20(1): 89-94.
- Tang Jianmin, Zhao Yin and Wu Lihua. An Eulerian geometrically non-linear finite element method with two-node cable element for the analysis of cable structures[J]. Shanghai Journal of Mechanics, 1999, 20(1): 89-94.
- [10] H B Jayaraman and W C Knudson. A curved element for the analysis of cable structures[J]. Computers and

Structures,1981,14:325-333.

[11] J Michalos and C Birnstiel. Movement of a cable due to changes in loadings[J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1960, 86(ST12):23-38.

[12] 董明, 夏绍华. 张力结构的非线性有限元分析[J].

计算力学学报, 1997,14(3):268-275.

Dong Ming, Xia Shaohua, Qian Ruojun and Shen Zuyan. An investigation of the nonlinear analysis of tensile structure with F.E.M.[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1997,14(3):268-275.

NONLINEAR ANALYSIS OF CABLE STRUCTURES USING A TWO-NODE CURVED CABLE ELEMENT OF HIGH PRECISION

YANG Meng-gang , CHEN Zheng-qing

(Civil Architectural Engineering College, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: Based on the virtual work increment equation of updated Lagrangian formulation and the basic assumption of cable, a finite element method with two-node curved cable element for the geometrical non-linear analysis of cable structures is developed and its stiffness matrix is presented. With reference to the geometric shape and physical equation of cable, the node forces of cable element are accurately formulated. The present method overcomes the disadvantages of two other widely used elements: two-node linear bar element which has low precision and the multi-node element which is difficult to computerize for many D.O.F. This method in the paper can be used in the analysis of long-span suspension bridge, cable-stayed bridge and tensile structure. The results of three examples show that the proposed method is very precise and valid.

Key words: bridge supported with cable; tensile structure; nonlinear finite element method; two-node curved cable element

(上接 26 页)

THE ANALYSIS OF HYSTERETIC BEHAVIOR OF PALL-TYPED FRICTIONAL DAMPERS CONSIDERING GEOMETRY NONLINEARITY

WU Bin , ZHANG Ji-gang , OU Jin-ping

(School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090)

Abstract: Based on the geometry nonlinearity of four-link mechanism of Pall frictional damper (PFD), the influence of buckling force of braces, brace stiffness and slip force on the hysteretic behavior of an improved PFD —T-shaped cone plate frictional damper (TFD) is analyzed. On the one hand, it is verified strictly that the hysteretic behavior of TFD (or PFD) is not influenced by the buckling force of braces. On the other hand, some new phenomena are revealed. Firstly, the tension force of the braces does not keep constant but increases remarkably after the slipping of TFD. Secondly, the maximum tension force of the braces has relationship with brace stiffness, and the greater is the brace stiffness, the greater the maximum tension force of the braces is.

Key words: energy dissipation; frictional damper; geometry nonlinearity