

文章编号 : 1000-4750(2004)02-0152-06

四边简支功能梯度矩形板的热屈曲分析

武兰河, 王立彬, 刘淑红

(石家庄铁道学院力学与工程科学系, 石家庄 050043)

摘 要: 基于经典板理论, 假设材料性质为板厚度方向坐标的幂函数, 推导了功能梯度材料矩形板在热荷载作用下的平衡方程和稳定方程。给出了四边简支的功能梯度板在均匀受热时临界屈曲温度变化的封闭解, 讨论了板的几何外形尺寸、相对厚度、梯度指数以及中面变形等因素对临界屈曲温度变化的影响。

关键词: 板稳定; 热屈曲; 矩形板; 功能梯度材料

中图分类号: TU311 文献标识码: A

ON THERMAL BUCKLING OF A SIMPLY SUPPORTED RECTANGULAR FGM PLATE

WU Lan-he, WANG Li-bin, LIU Shu-hong

(Department of Mechanics and Engineering Science, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: Based on the classical plate theory, the equilibrium and stability equations of a rectangular plate made of functionally graded material subjected to thermal loading condition are derived. The material properties are assumed to vary as a power form of thickness coordinate variable. Closed form solutions for a simply supported rectangular plate made of functionally graded material under uniform heat change are presented. The influences of the plate aspect ratio, relative thickness of plate functionally gradient index, and displacements of neural plate plane on the buckling temperature difference are discussed.

Key words: plate stability; thermal buckling; rectangular plate; functionally graded material

1 引言

功能梯度材料是日本科学家于 1984 年首先提出的^[1], 它是在航空航天工程和核工业工程中用来承受超高温和高梯度温度变化的一种高性能复合材料, 通常是由陶瓷和金属混合而成的, 陶瓷由于其低传热系数而用于抵抗高温, 金属则由于其良好的延展性而防止了短时间内温度的剧变产生的应力导致的断裂破坏。从微观角度来看, 功能梯度材

料属非均质材料, 其材料性质从板的一侧到另一侧连续光滑地变化, 这是通过改变不同材料组分的体积百分比而实现的。与纤维增强复合材料相比, 功能梯度材料不存在两种材料粘结在一起时的界面力学性质不匹配问题, 应力在各点处均是连续而光滑的, 因而其力学性能更加优越。

最近十年来, 功能梯度材料由于其卓越的性能引起了人们广泛的关注, 许多科学家在这一领域进

收稿日期: 2002-10-02; 修改日期: 2003-01-07

作者简介: 武兰河(1965), 男, 河北石家庄人, 副教授, 硕士, 从事结构力学计算研究(E-mail: lxx_of@sohu.com);

王立彬(1970), 男, 河北石家庄人, 讲师, 硕士, 从事结构力学计算研究;

刘淑红(1968), 女, 辽宁北票人, 讲师, 博士, 从事压电体裂纹问题研究

行了深入细致的研究并发表了大量的文献。Tanigawa 等人通过引入层合复合材料模型推导了非均质板一维温度解的瞬态响应且优化了材料组分^[2]。Takezono 等人给出了轴对称功能梯度圆柱壳受到由于流体引起的温度变化时而产生的热应力和变形的解析解及数值解^[3]。Aboudi 等提出了功能梯度材料板的一种新的高阶理论^[4]，它显式地表达了微观结构和宏观结构的耦合影响。Praveen 和 Reddy 给出了一种有限元模型并利用该模型研究了功能梯度板的动力响应问题^[5]，文中的单元考虑了剪切变形和转动惯性的影响。Reddy 等利用经典的 Kirchhoff 板的结果导出了功能梯度圆板和环板的位移和力参量的一阶剪切变形理论解^[6]。Sumi 以耦合的热弹性方程和修正的 Fourier 定律为基础，研究了功能梯度板在热冲击荷载作用下的波的传播和反射问题^[7]。Reddy 和 Chin 等基于一阶剪切变形理论，研究了功能梯度圆柱壳和板的热弹性响应问题^[8]。Zimmerman 和 Lutz 对均匀受热的功能梯度圆柱壳给出了热应力和热膨胀问题的精确解^[9]。Chunyu 等求解了同轴的两相材料组成的圆柱壳在扭转冲击作用下的层间裂纹问题^[10]。最近，Tanigawa 等又求解了非均匀材料板的三维热弹性问题^[11]。

从以上浏览情况来看，绝大多数文献都是关于功能梯度材料的热应力分析、断裂力学行为以及材料优化问题的，而对于其稳定、振动特性等问题的研究却非常有限。Birman 研究了功能梯度复合材料矩形板单向受压时的屈曲问题^[12]；Ng 和 Lam 等讨论了受周期荷载作用的功能梯度圆柱壳的动力稳定性问题^[13]。本文以经典的平板理论为基础，假设材料的热弹性常数均为板厚方向坐标的幂函数，推导了功能梯度矩形板在温度变化时的平衡方程和屈曲方程，并给出了四边简支矩形板的屈曲临界温度的封闭解。对于功能梯度平板，由于其几何中面并非力学对称面，故其中面的面内位移有一定影响，本文考虑了中面位移并讨论了其对屈曲的影响。

2 平衡方程和稳定方程

考虑一尺寸为 $a \times b \times h$ 的矩形板如图 1 所示，板的下侧为金属，上侧为陶瓷，中间为两种材料组成的混合物。

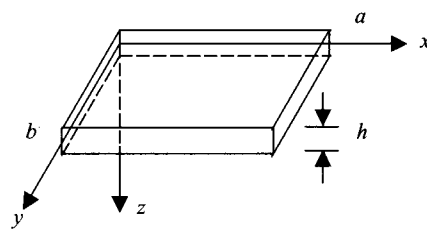


图 1 板的几何图示和直角坐标系

Fig.1 Configuration and coordinate system of a plate

设金属的弹性模量和热膨胀系数分别为 E_m 和 α_m ，陶瓷的弹性模量和热膨胀系数分别为 E_c 和 α_c ，并设金属和陶瓷的泊桑系数相同，则板内任意一点的弹性模量、热膨胀系数和泊桑比为

$$E(z) = E_c V_c + E_m (1 - V_c) \quad (1)$$

$$\alpha(z) = \alpha_c V_c + \alpha_m (1 - V_c), \quad \nu(z) = \nu_0$$

其中， V_c 为陶瓷材料组分的体积比例系数，设其为板厚方向坐标 z 的幂函数

$$V_c = (z/h + 1/2)^k \quad (2)$$

其中 k 为梯度指数。将 (2) 式代入 (1) 式，整理后得到用两种材料材料常数及坐标 z 表示的板内任一点处的材料常数

$$E(z) = E_{cm} (z/h + 1/2)^k + E_m, \quad (3)$$

$$\alpha(z) = \alpha_{cm} (z/h + 1/2)^k + \alpha_m, \quad \nu(z) = \nu_0$$

式中

$$E_{cm} = E_c - E_m, \quad \alpha_{cm} = \alpha_c - \alpha_m \quad (4)$$

根据经典板的非线性理论，板内任意一点的应变为

$$\mathbf{e}_x = u_{,x} - zw_{,xx} + \frac{1}{2} w_{,x}^2, \quad \mathbf{e}_y = u_{,y} - zw_{,yy} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \quad (5)$$

$$\mathbf{g}_{xy} = u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy}$$

式中， u, v, w 为板中面上各点沿 x, y, z 方向的位移。

根据 Hooke 定律，板内任一点的应力为

$$\mathbf{s}_x = \frac{E}{1 - \nu^2} [\mathbf{e}_x + \nu \mathbf{e}_y - (1 + \nu) \alpha \mathbf{t}]$$

$$\mathbf{s}_y = \frac{E}{1 - \nu^2} [\mathbf{e}_y + \nu \mathbf{e}_x - (1 + \nu) \alpha \mathbf{t}] \quad (6)$$

$$\mathbf{t}_{xy} = G \mathbf{g}_{xy}$$

板单位长度的内力和内力矩可以用板的应力沿厚度方向积分而得到

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{s}_{ij} dz, \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{s}_{ij} z dz \quad (7)$$

将 (3) 式、(5) 式及 (6) 式代入 (7) 式有

$$\begin{aligned}
N_x &= \frac{E_1}{1-\mathbf{n}^2} (u_{,x} + \mathbf{n}v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{n}v_{,y}^2) \\
&\quad - \frac{E_2}{1-\mathbf{n}^2} (w_{,xx} + \mathbf{n}w_{,yy}) - \frac{\mathbf{F}}{1-\mathbf{n}} \\
N_y &= \frac{E_1}{1-\mathbf{n}^2} (\mathbf{n}u_{,x} + v_{,y} + \frac{1}{2}\mathbf{n}w_{,x}^2 + \frac{1}{2}w_{,y}^2) \\
&\quad - \frac{E_2}{1-\mathbf{n}^2} (\mathbf{n}w_{,xx} + w_{,yy}) - \frac{\mathbf{F}}{1-\mathbf{n}} \\
N_{xy} &= \frac{E_1}{2(1+\mathbf{n})} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y}) - \frac{E_2}{1+\mathbf{n}} w_{,xy} \\
M_x &= \frac{E_2}{1-\mathbf{n}^2} (u_{,x} + \mathbf{n}v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{n}v_{,y}^2) \\
&\quad - \frac{E_3}{1-\mathbf{n}^2} (w_{,xx} + \mathbf{n}w_{,yy}) - \frac{\mathbf{Q}}{1-\mathbf{n}} \\
M_y &= \frac{E_2}{1-\mathbf{n}^2} (\mathbf{n}u_{,x} + v_{,y} + \frac{1}{2}\mathbf{n}w_{,x}^2 + \frac{1}{2}w_{,y}^2) \\
&\quad - \frac{E_3}{1-\mathbf{n}^2} (\mathbf{n}w_{,xx} + w_{,yy}) - \frac{\mathbf{Q}}{1-\mathbf{n}} \\
M_{xy} &= \frac{E_2}{2(1+\mathbf{n})} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y}) - \frac{E_3}{1+\mathbf{n}} w_{,xy}
\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_m h + \frac{E_{cm} h}{k+1}, \quad E_2 = \frac{k E_{cm} h^2}{2(k+1)(k+2)}, \\
E_3 &= \frac{1}{12} E_m h^3 + \left[\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+1)} \right], \\
\mathbf{F} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[E_m + E_{cm} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \right] \\
&\quad \cdot \left[\mathbf{a}_m + \mathbf{a}_{cm} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \right] T(x, y, z) dz \\
\mathbf{Q} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[E_m + E_{cm} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \right] \\
&\quad \cdot \left[\mathbf{a}_m + \mathbf{a}_{cm} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \right] T(x, y, z) z dz
\end{aligned} \tag{9}$$

根据经典薄板的大挠度理论, 其平衡方程为

$$\begin{aligned}
N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\
N_{y,y} + N_{xy,x} &= 0 \\
M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy} \\
+ N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + 2N_{xy} w_{,xy} &= 0
\end{aligned} \tag{10}$$

将(8)式代入(10)式, 得到用位移表示的平衡方程。将平衡方程中的第一式对 x 求一阶导数, 第二式对 y 求一次导数, 两式相加后代入第三式, 可消去变量 u, v , 得到仅用变量 w 表示的板的平衡方程

$$\begin{aligned}
&\frac{E_2^2 - E_1 E_3}{E_1(1-\mathbf{n}^2)} \nabla^4 w + \frac{E_2}{E_1(1-\mathbf{n})} \nabla^2 \mathbf{F} \\
&- \frac{1}{1-\mathbf{n}} \nabla^2 \mathbf{Q} + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

现利用临界平衡法推导板的屈曲方程, 在(11)式中分别给 w 和 T 一个微小增量 $w \rightarrow w_0 + \mathbf{d}w$, $T = T_0 + \mathbf{d}T$, 其中 w_0 和 T_0 为临界状态的挠度和温度, 它们既满足屈曲前的平衡方程, 又满足屈曲后的平衡方程。将 w 和 T 代入(11)式减去原来的平衡方程, 略去高阶项后得到屈曲方程, 记 $\mathbf{d}w$ 和 $\mathbf{d}F$ 为 w_1 和 F_1 , 则有

$$\begin{aligned}
&\frac{E_2^2 - E_1 E_3}{E_1(1-\mathbf{n}^2)} \nabla^4 w_1 + \frac{E_2}{E_1(1-\mathbf{n})} \nabla^2 F_1 \\
&- \frac{1}{1-\mathbf{n}} \nabla^2 \mathbf{Q} + N_{x0} w_{1,xx} \\
&+ 2N_{xy0} w_{1,xy} + N_{y0} w_{1,yy} = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

其中 N_{x0} 、 N_{y0} 和 N_{xy0} 为屈曲前的内力。

3 温度均匀变化时板的屈曲

设板的各处初始温度相同, 且各处温度变化 DT 也相同, 边界条件为面内方向固定, 弯曲方向简支, 现在来确定板屈曲时的临界温度升高 DT_{cr} 。

首先求解屈曲前的薄膜温度内力, 由于温度变化在面内为均匀的, 故 $N_{xy0} = 0$, 由(10)式知 N_{x0} 和 N_{y0} 应为常数, 再结合(8)式有

$$N_{x0} = -\frac{\mathbf{F}}{1-\mathbf{n}}, N_{y0} = -\frac{\mathbf{F}}{1-\mathbf{n}}, N_{xy0} = 0 \tag{13}$$

同样由温度在面内均匀变化可知

$$\nabla^2 F_1 = \nabla^2 \mathbf{Q}_1 = 0 \tag{14}$$

将(13)式和(14)式代入(12)式得

$$\frac{E_2^2 - E_1 E_3}{E_1(1-\mathbf{n}^2)} \nabla^4 w_1 - \frac{\mathbf{F}}{1-\mathbf{n}} (w_{1,xx} + w_{1,yy}) = 0 \tag{15}$$

当板的边界为简支时, 其约束方程为

$$\begin{aligned}
x=0, a \text{ 边}: w_1 = M_{x1} = 0; \\
y=0, b \text{ 边}: w_1 = M_{y1} = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

设满足边界条件(16)式的解为

$$w_1 = c \sin(m\mathbf{p}x/a) \sin(n\mathbf{p}y/b) \tag{17}$$

式中 m, n 为板屈曲时沿 x, y 方向的半波数, c 为任意的常数。将热参数 F 的表达式(9)和(17)式代入(15)式得

$$DT = P/M \tag{18}$$

其中

$$P = (E_1 E_3 - E_2^2) \mathbf{p}^2 [m^2 + n^2 (a/b)^2] \tag{19}$$

$$M = (1+n)E_1ha^2[E_m\mathbf{a}_m + (E_{cm}\mathbf{a}_m + E_m\mathbf{a}_{cm})/(k+1) + E_{cm}\mathbf{a}_{cm}/(2k+1)] \quad (20)$$

显然，欲使 DT 取极小，必须 $m = n = 1$ ，于是得屈曲临界温度

$$DT_{cr} = \bar{P} / \bar{M} \quad (21)$$

其中

$$\bar{P} = (E_1E_3 - E_2^2)\mathbf{p}^2[1 + (a/b)^2] \quad (22)$$

$$\bar{M} = (1+n)E_1ha^2[E_m\mathbf{a}_m + (E_{cm}\mathbf{a}_m + E_m\mathbf{a}_{cm})/(k+1) + E_{cm}\mathbf{a}_{cm}/(2k+1)] \quad (23)$$

当 $k = 0$ 时，(21)式退化为

$$DT_{cr} = \frac{\mathbf{p}^2(h/a)^2[1 + (a/b)^2]}{12(1+n)\mathbf{a}} \quad (24)$$

这与 Tauchert^[14]和 Thornton^[15]给出的均质各向同性板的临界屈曲温度相同。

若不计中面位移，则屈曲方程(15)式变为

$$\frac{E_3}{(1-\mathbf{n}^2)}\nabla^4w_1 + \frac{\mathbf{F}}{1-\mathbf{n}}(w_{1,xx} + w_{1,yy}) = 0 \quad (25)$$

相应地，屈曲临界温度为

$$DT_{cr} = \tilde{P} / \tilde{M} \quad (26)$$

式中

$$\tilde{P} = E_3\mathbf{p}^2[1 + (a/b)^2] \quad (27)$$

$$\tilde{M} = (1+n)ha^2[E_m\mathbf{a}_m + (E_{cm}\mathbf{a}_m + E_m\mathbf{a}_{cm})/(k+1) + E_{cm}\mathbf{a}_{cm}/(2k+1)] \quad (28)$$

对各向同性材料($k = 0$)，屈曲临界温度表达式与(24)式相同。

4 数值结果与讨论

根据前面提出的方法，本文对一四边简支的陶瓷—金属功能梯度矩形薄板进行了计算，陶瓷材料的弹性模量和热膨胀系数分别为 $E_c = 380 \text{ GPa}$ ， $\mathbf{a}_c = 7.4 \times 10^{-6} (1/^\circ\text{C})$ ，金属材料的弹性模量和热膨胀系数分别为 $E_m = 70 \text{ GPa}$ ， $\mathbf{a}_m = 23 \times 10^{-6} (1/^\circ\text{C})$ ，两种材料的 Poisson 比均为 $\mathbf{n} = 0.3$ 。对不同的梯度指数本文计算了临界屈曲温度随板的长宽比 a/b 变化的情况(板的相对厚度 h/a 为 0.01)，见图 2 所示，由图 2 可以看出无论梯度因子为多少，其临界屈曲温度都随着长宽比的增加而单调增加， $k = 0$ 时临界温度最大，且其增长幅度也最大，此时为均质各向同性的陶瓷材料板。随着梯度指数的增大，其临界温度会越来越小，当 $k \geq 1$ 以后 DT_{cr} 的变化很小。图 3 为 DT_{cr} 随板的相对厚度 h/a 变化而变化的情况(取 $a/b = 1$)，可以看出，随 h/a 的增加 DT_{cr} 同样呈单调增的趋势，且与梯度因子 k 的关系也与前图类

似。图 4 为 DT_{cr} 随梯度因子 k 变化而变化的情况，与前面得到的结论相同， DT_{cr} 随 k 的增加而衰减，当 $k \geq 1$ 以后 DT_{cr} 变化非常小，但是当 $k \geq 3$ 之后 DT_{cr} 却略有增长，由图还可以看出， DT_{cr} 随板的几何相对尺寸 a/b 的增加而增加。

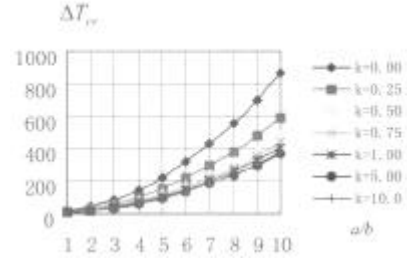


图 2 临界温度随长宽比变化的情况

Fig.2 Critical temperature difference DT_{cr} vs. plate aspect ratio a/b

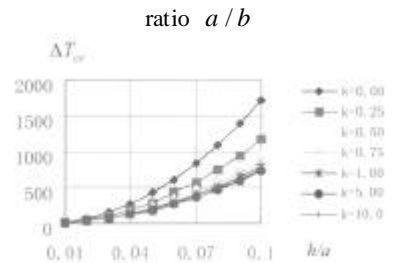


图 3 临界温度随厚长比变化情况

Fig.3 Critical temperature difference DT_{cr} vs. plate relative thickness h/a

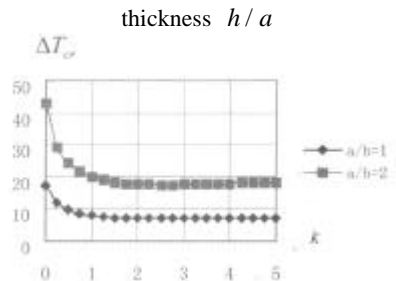


图 4 临界温度随梯度指数变化的情况($h/a=0.01$)

Fig.4 Critical temperature difference DT_{cr} vs. material gradient index k

下面讨论中面变形对屈曲温度变化的影响，设板的长宽比为 $a/b = 1$ ，表 1 给出了具有不同相对厚度和不同梯度指数的该板的临界屈曲温度变化。由表 1 看到，除均质各向同性板($k = 0$)以外，考虑中面变形影响之后的临界屈曲温度改变 DT_{cr} 均小于不计中面变形时的临界温度 DT_{cr}^* ，且随梯度指数的增大，这种减小会越来越显著，如 $k = 0.25$ ， $h/a = 0.01$ 时二者的相对误差为 2.3%，而当 $k = 1$ ， $h/a = 0.1$ 时这种相对误差会达到 15%，也就是说中面变形的影响会随梯度指数的增大而增大。由表 1 还可看出，厚板中面变形对临界屈曲温度改变的绝

对值的影响要大于薄板中面变形对屈曲温度绝对值的影响, 但 D_{cr} 与 DT_{cr}^* 的相对误差却保持为常数, 如当 $k=1$, $h/a=0.01$ 时, D_{cr} 与 DT_{cr}^* 的绝对

差值为 1.492757°C , 相对误差为 15%, 而当相对厚度 $h/a=0.1$ 时两者的绝对差值为 149.2757°C 相对误差仍为 15%。

表 1 中面变形对屈曲临界温度变化 D_{cr} 的影响($a/b=1$)

Table 1 Influence of neural plane displacements on the critical temperature difference

h/a	$k=0$		$k=0.25$		$k=0.5$		$k=0.75$		$k=1$	
	D_{cr}	DT_{cr}^*	D_{cr}	DT_{cr}^*	D_{cr}	DT_{cr}^*	D_{cr}	DT_{cr}^*	D_{cr}	DT_{cr}^*
0.01	17.09910	17.09910	11.72801	12.00981	9.687899	10.41647	8.596539	9.743398	7.943771	9.436528
0.02	68.39642	68.39642	46.91204	48.03926	38.75159	41.66589	34.38616	38.97359	31.77509	37.74611
0.03	153.8919	153.8919	105.5521	108.0883	87.19108	93.74826	77.36886	87.69058	71.49394	84.92876
0.04	273.5857	273.5857	187.6482	192.1570	155.0064	166.6636	137.5446	155.8944	127.1003	150.9845
0.05	427.4776	427.4776	293.2002	300.2453	242.1974	260.4118	214.9135	243.5849	198.5943	235.9132
0.06	615.5677	615.5677	422.2084	432.3533	348.7643	374.9930	309.4754	350.7623	285.9758	339.7150
0.07	837.8561	837.8561	574.6725	588.4809	474.7070	510.4073	421.2305	477.4265	389.2448	462.3899
0.08	1094.343	1094.343	750.5927	768.6281	620.0255	666.6542	550.1785	623.5775	508.4014	603.9378
0.09	1385.027	1385.027	949.9688	972.7950	784.7197	843.7343	696.3196	789.2151	643.4454	764.3589
0.10	1709.910	1709.910	1172.801	1200.981	968.7898	1041.647	859.6539	974.3397	794.3771	943.6528

注: D_{cr} 为考虑中面变形的临界温度变化; DT_{cr}^* 为不考虑中面变形时的临界温度变化

5 结论

本文首先推导了功能梯度矩形薄板在温度变化荷载作用下的屈曲方程, 然后对四边简支的板给出了其屈曲临界温度变化的解析解, 并对由陶瓷——金属组成的功能梯度板进行了数值计算, 研究了板的几何尺寸、相对厚度、梯度指数和中面变形等因素对临界温度的影响, 结果表明:

(1) 一般说来, 功能梯度板的临界屈曲温度变化 D_{cr} 要小于相应的均质各向同性板的临界屈曲温度变化。作为一种隔热材料, 功能梯度材料具有许多优点, 但是在具体应用时一定要注意校核其热

屈曲强度。

(2) 功能梯度材料板的临界屈曲温度变化 D_{cr} 随板的相对几何外形尺寸 a/b 的增加而增加, 随板的相对厚度 h/a 的增加亦增加, 但随梯度指数 k 值的增加而减小。

(3) 中面变形对功能梯度材料板的屈曲临界温度变化有一定影响, 尤其是对相对厚度较大和梯度指标较高的板, 忽略中面变形的影响将导致屈曲临界温度变化值 D_{cr} 非常大的绝对误差, 但由于 D_{cr} 与板的相对厚度 h/a 成比例, 故中面变形对屈曲临界温度变化值 D_{cr} 的相对误差没有任何影响。

- Earthquake Eng. Stru. Dyn., 2000, 29(2): 195-212.
- [7] P K Malhotra, J H Moh, F S Anthon. Seismic interaction at separation joints of an instrumented concrete bridge[J]. Earthquake Eng. Stru. Dyn., 1995, 24(3): 1055-1067.
- [8] P K Malhotra. Dynamic of seismic pounding at expansion joints of concrete bridges[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1998, 124(7): 794-802.
- [9] R Desroches, G L Fenves. Evaluation of recorded earthquake response of a curved highway bridge[J]. Earthquake Spectral, 1997, 13(3):363-386.
- [10] M J Huang, A F Shakal. CSMIP strong-motion instrumentation and records from i10/215 interchange bridge near san bernardino[J]. Earthquake Spectral, 1995, 11(2):193-215.
- [11] 刘德顺, 李夕兵. 冲击机械系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- Liu Deshun, Li Xibing. Dynamics of shock machine systems [M]. Beijing: Science Press, 1999. (in Chinese)

(上接 156 页)

参考文献：

- [1] Koizumi M. FGM activities in Japan[J]. Composites, 1997,28(1-2):1-4.
- [2] Tanigawa Y, Matsumoto M, Akai T. Optimization of material composition to minimize thermal stresses in non-homogeneous plate subjected to unsteady heat supply[J]. Japan Society of Mechanical Engineers International Journal, Series A, 1997,40(1):84-93.
- [3] Takezono S, Tao K, Inamura E. Thermal stress and deformation in functionally graded material shells of revolution under thermal loading due to fluid[J]. Japan Society of Mechanical Engineers International Journal, Series A, 1996, 62(594): 474-481.
- [4] Aboudi J, Pindera M, Arnold S M. Coupled higher-order theory for functionally grade composites with partial homogenization[J]. Composites Engineering, 1995, 5(7): 771-792.
- [5] Praveen G N, Reddy J N. Nonlinear transient thermal elastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates[J]. International Journal of Solids and Structures, 1998, 35(33):4457-4476.
- [6] Reddy J N, Wang C M, Kitiporchai S. Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates[J]. European Journal of Mechanics, A/Solids, 1999, 18(1): 185-199.
- [7] Sumi N. Numerical solution of thermal and mechanical waves in functionally graded materials[C]. Third International Congress on Thermal Stresses, Branti Zew, Krakow, Poland, 1999. 569-572.
- [8] Reddy J N, Chin C D. Thermalmechanical analysis of functionally graded cylinders and plates[J]. Journal of Thermal Stresses, 1998, 21: 593-626.
- [9] Zimmerman R W, Lutz M P. Thermal stresses and thermal expansion in a uniformly heated functionally graded cylinder[J]. Journal of Thermal Stresses, 1999, 22:177-188.
- [10] Chunyu L, George J, Zhuping D. Dynamic behavior of a cylindrical crack in a functionally graded interlayer under torsional loading[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001,38(61): 7473-7485.
- [11] Tanigawa Y, Morishita H, Ogaki S Derivation of systems of fundamental equations for a three dimensional thermoelastic field with nonhomogeneous material properties and its application to a semi-infinite body[J]. Journal of Thermal Stresses, 1999, 22:689-711.
- [12] Birman V. Buckling of functionally graded hybrid composite plates[C]. Proceedings of the 10th conference on engineering mechanics, Boulder, CO, 1995:1199-1202.
- [13] Ng T Y, Lam K Y, Liew K M. Dynamic stability analysis of functionally graded cylindrical shells under periodic axial loading[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(9): 1295-1309.
- [14] Tauchert T R. Thermal buckling of thick antisymmetric angle ply laminates[J]. Journal of Thermal Stresses, 1987, 10(1): 113-124.
- [15] Thornton E A. Thermal buckling of plates and shells[J]. Applied Mechanics Review, 1993, 46(10): 485-506.