

文章编号: 1000-4750(2005)04-0058-04

不完整结构系统同时考虑强度和刚度的可靠性分析

*安伟光, 赵维涛, 严心池

(哈尔滨工程大学航天工程系, 哈尔滨 150001)

摘 要: 基于结构强度可靠性分析理论的基础之上, 提出了不完整结构(结构系统中有部分元件已失效, 但结构未变成机构仍具有一定的承载能力)强度、刚度可靠性的分析方法。该方法考虑了元件因强度失效对不完整结构系统强度、刚度可靠性的影响, 同时导出了等效安全余量的形式, 进而计算结构系统在失效各阶段的总体失效概率。并结合算例对结构系统在失效各阶段进行了强度、刚度的可靠性分析。算例表明, 这样分析符合结构在使用各阶段可靠性的真实情况, 从而为结构的合理利用起指导性作用。

关键词: 工程力学; 可靠性; 不完整结构; 强度; 刚度; 等效安全余量

中图分类号: O213.2 **文献标识码:** A

RELIABILITY ANALYSIS OF IMPERFECT STRUCTURAL SYSTEMS CONSIDERING STRENGTH AND STIFFNESS

*AN Wei-guang, ZHAO Wei-tao, YAN Xin-chi

(Department of Aerospace Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: Based on structural strength reliability theory, a reliability analysis method of strength and stiffness of imperfect structures is proposed. The imperfect structure is defined as structure with partial element failure which does not yield a collapse mechanism and still has load bearing capability. This method considers the influence of failure elements on the reliability of imperfect structural strength or stiffness and gives equivalent safe margins. Therefore, the total failure probabilities of structural systems can be calculated at each failure state. A numerical example is studied. It is shown that such analysis is suitable for real reliability cases at each service state and the results are instructive for safety of structures in service.

Key words: engineering mechanics; reliability; imperfect structures; strength; stiffness; equivalent safe margins

目前, 完整结构的强度、刚度可靠性分析已研究较为深入^[1~6], 对不完整结构的强度、刚度可靠性的研究相对较少。对于由弹塑性材料组成的静不定系统, 任一元件的失效不一定引起结构系统的失效^[7]。在实际使用中的结构系统, 特别是战争中的

武器结构系统, 或平时航空, 航天和船舶等结构系统。由于意外因素发生部分结构元件损伤(但结构并没有变成机构), 此时战争决策人员和工程技术人员很想了解该受损结构系统继续使用的可靠性, 以便决定该结构能否继续使用及制定维修策略。因此,

收稿日期: 2003-11-14; 修改日期: 2004-03-28

作者简介: *安伟光(1943), 男, 哈尔滨人, 教授, 博士生导师, 从事结构优化与可靠性研究(E-mail: anweiguang@hrbeu.edu.cn);

赵维涛(1977), 男, 哈尔滨人, 博士生, 从事结构优化与可靠性研究;

严心池(1977), 女, 哈尔滨人, 博士生, 从事结构优化与可靠性研究。

对不完整结构的强度、刚度可靠性分析才更符合工程实际^[8]。本文在强度可靠性分析理论的基础之上，提出了不完整结构强度、刚度可靠性的分析方法。以条件概率的形式给出了不完整结构因强度、刚度失效所对应的模式失效概率，并导出了相应的安全余量方程。这样就能够计算结构系统在失效各阶段各失效模式之间的相关性，从而有效的计算不完整结构系统失效概率，这对受损结构系统综合考虑失效各阶段刚度和强度的可靠性分析具有重要价值。

1 模式失效概率

1.1 强度模式失效概率

假定具有 n 个元件的结构系统，当失效元件(简称失效元)数达到某一 p_q 值时使结构失效，此时就形成了一个失效模式。结构系统中有 $p(p \leq p_q - 1)$ 个失效元因强度失效称为 p 级失效阶段，其所对应的不完整结构强度失效概率可以写成如下条件概率的形式，即在失效元 r_1, r_2, \dots, r_p 联合失效的条件下，第 $r_{p+1}, r_{p+2}, \dots, r_{p_q}$ 个失效元联合失效概率，有

$$P\left(\frac{\prod_{i=p+1}^{p_q} r_i}{\prod_{j=1}^p r_j}\right) = \frac{P\left[\prod_{i=p+1}^{p_q} M_{r_i(r_1, r_2, \dots, r_{i-1})} \leq 0 \middle/ \prod_{j=1}^p M_{r_j(r_1, r_2, \dots, r_{j-1})} \leq 0\right]}{P\left[\prod_{j=1}^p M_{r_j(r_1, r_2, \dots, r_{j-1})} \leq 0\right]} \quad (1)$$

其中， r_i 为失效元； $M_{r_i(r_1, r_2, \dots, r_{i-1})}$ 为当失效元 r_1, r_2, \dots, r_{i-1} 失效后失效元 r_i 的安全余量； $M_{r_j(r_1, r_2, \dots, r_{j-1})}$ 为当失效元 r_1, r_2, \dots, r_{j-1} 失效后失效元 r_j 的安全余量。

由概率论知，(1)式可写成如下形式

$$\frac{P\left(\frac{\prod_{i=p+1}^{p_q} r_i}{\prod_{j=1}^p r_j}\right)}{P\left[\prod_{j=1}^p M_{r_j(r_1, r_2, \dots, r_{j-1})} \leq 0\right]} = \frac{P\left[\left(\prod_{i=p+1}^{p_q} M_{r_i(r_1, r_2, \dots, r_{i-1})} \leq 0\right) \cap \left(\prod_{j=1}^p M_{r_j(r_1, r_2, \dots, r_{j-1})} \leq 0\right)\right]}{P\left[\prod_{j=1}^p M_{r_j(r_1, r_2, \dots, r_{j-1})} \leq 0\right]} = \frac{P\left[\prod_{i=1}^{p_q} M_{r_i(r_1, r_2, \dots, r_{i-1})} \leq 0\right]}{P\left[\prod_{j=1}^p M_{r_j(r_1, r_2, \dots, r_{j-1})} \leq 0\right]} \quad (2)$$

进一步可将(2)式分子和分母所对应的失效路径相应的安全余量通过等效安全余量^[9]的方法，写成如下形式

$$M_M^e = -\bar{\alpha}_M^T \bar{Z} + \beta_M \quad (3)$$

$$M_Q^e = -\bar{\alpha}_Q^T \bar{Z} + \beta_Q \quad (4)$$

其中， M_M^e 和 M_Q^e 分别为(2)式分子和分母所对应的等效安全余量； $\bar{\alpha}_M$ 和 $\bar{\alpha}_Q$ 分别为(2)式分子和分母所对应的等效单位正态向量； β_M 和 β_Q 分别为(2)式分子和分母所对应的等效可靠性指标。

则(2)式可以写成如下形式

$$P\left(\frac{\prod_{i=p+1}^{p_q} r_i}{\prod_{j=1}^p r_j}\right) = \frac{\Phi(-\beta_M)}{\Phi(-\beta_Q)} = \Phi(-\beta_{MQ}) \quad (5)$$

其中， $\beta_{MQ} = -\Phi^{-1}\left[P\left(\frac{\prod_{i=p+1}^{p_q} r_i}{\prod_{j=1}^p r_j}\right)\right]$ 为(1)式所对应失效模式的广义可靠性指标。

下面将给出由(1)式所对应的等效安全余量形式，即失效元在强度失效的条件下，所对应不完整结构强度失效的等效安全余量形式。由线性化后的安全余量方程(如 $-\bar{\alpha}_i^T \bar{Z} + \beta_i = 0$)可知，可靠性指标为设计变量 \bar{Z} 的函数，并且有 $\partial\beta_i/\partial Z_i = \alpha_i$ 。因此，(5)式对设计变量 Z_i 求偏导，有

$$\frac{\varphi(-\beta_M)(-\partial\beta_M/\partial Z_i)\Phi(-\beta_Q)}{[\Phi(-\beta_Q)]^2} - \frac{\varphi(-\beta_Q)(-\partial\beta_Q/\partial Z_i)\Phi(-\beta_M)}{[\Phi(-\beta_Q)]^2} = \frac{\varphi(-\beta_{MQ})(-\partial\beta_{MQ}/\partial Z_i)}{\varphi(-\beta_{MQ})} \quad (6)$$

由此得

$$\frac{\partial\beta_{MQ}}{\partial Z_i} = \frac{\varphi(-\beta_M)(\partial\beta_M/\partial Z_i)\Phi(-\beta_Q)}{[\Phi(-\beta_Q)]^2 \varphi(-\beta_{MQ})} - \frac{\varphi(-\beta_Q)(\partial\beta_Q/\partial Z_i)\Phi(-\beta_M)}{[\Phi(-\beta_Q)]^2 \varphi(-\beta_{MQ})} \quad (7)$$

其中， $\varphi(\cdot)$ 为标准正态概率密度函数。

$\partial\beta_M/\partial Z_i$ 和 $\partial\beta_Q/\partial Z_i$ 由(3)式和(4)式所对应的安全余量方程给出，如下式

$$\partial\beta_M/\partial Z_i = \alpha_{M_i} \quad (8)$$

$$\partial\beta_Q/\partial Z_i = \alpha_{Q_i} \quad (9)$$

其中， α_{M_i} 和 α_{Q_i} 分别为 $\bar{\alpha}_M$ 和 $\bar{\alpha}_Q$ 相应的分量。

因此，可将(1)式所对应的等效安全余量写成如下形式

$$M_{MQ}^e = -\bar{\alpha}_{MQ}^T \bar{Z} + \beta_{MQ} \quad (10)$$

其中， $\bar{\alpha}_{MQ}$ 为(1)式所对应的等效单位正态向量。各分量 α_{MQ_i} 由下式给出

$$\alpha_{MQ_i} = \frac{\partial \beta_{MQ} / \partial Z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \beta_{MQ}}{\partial Z_i} \right)^2}} \quad (11)$$

其中, $\partial \beta_{MQ} / \partial Z_i$ 由(7)式给出; n 为设计变量总数。

1.2 刚度模式失效概率

在进行刚度可靠性分析时, 首先对完整结构进行初始刚度可靠性分析。然后对结构进行强度可靠性分析, 找出强度主要失效路径, 并针对这些强度失效路径所对应的不完整结构进行刚度可靠性分析。考虑 $p(p \leq p_q - 1)$ 个失效元因强度失效后所对应的不完整结构, 某一控制点刚度失效概率可以写成如下条件概率的形式

$$P\left(j / \bigcap_{i=1}^p r_i\right) = P\left[G_{j(r_1, r_2, \dots, r_p)} \leq 0 / \bigcap_{i=1}^p M_{r_i(r_1, r_2, \dots, r_{i-1})} \leq 0\right] \quad (12)$$

其中, $G_{j(r_1, r_2, \dots, r_p)}$ 为当失效元 r_1, r_2, \dots, r_p 失效后控制点 j 的刚度安全余量, 由下式给出

$$G_{j(r_1, r_2, \dots, r_p)} = \delta^a - \delta^j \quad (13)$$

其中, δ^a 为控制点 j 的允许位移; δ^j 为控制点 j 的广义位移。

由(10)式的推导过程可知, (12)式所对应的等效安全余量可写成如下形式

$$M_{GE}^e = -\bar{\alpha}_{GE}^T \bar{Z} + \beta_{GE} \quad (14)$$

其中, $\bar{\alpha}_{GE}$ 为(12)式所对应的等效单位正态向量;

$\beta_{GE} = -\Phi^{-1}\left(P\left(j / \bigcap_{i=1}^p r_i\right)\right)$ 为(12)式所对应失效模式的

广义可靠性指标。

2 结构系统失效概率

由 1.1 给出强度在失效各阶段所对应的安全余量, 并将其线性化为(10)式的形式。由 1.2 给出结构刚度在失效各阶段所对应的安全余量, 并将其线性化为(14)式的形式。计算同一失效阶段等效安全余量之间的相关性, 然后用 PNET 方法计算结构系统在失效各阶段的总体失效概率。另外对于大型复杂结构, 计算并联系系统失效概率已有许多有效的近似方法^[10,11], 从而能够给出等效安全余量, 进而计算结构系统失效概率。

3 算例

如图 1 所示平面桁架结构。弹性模量为

$E = 6.67 \times 10^4$ MPa, 截面面积 A 均为 0.01m^2 , 元件 1~6 抗拉、抗压许用应力均值分别为 200MPa 和 100MPa, 元件 7~10 抗拉、抗压许用应力均值分别为 50MPa 和 25MPa。抗力均值 $R_i = [\sigma] \cdot A_i$, 变异系数为 $V_R = 0.1$ 。外力均值 $P = 250 \text{kN}$, 变异系数为 $V_P = 0.3$ 。取 5 号节点竖向位移为控制位移 $\delta^a = 3.33 \text{cm}$ 。设各基本变量为正态分布随机变量。试对该结构进行可靠性分析。

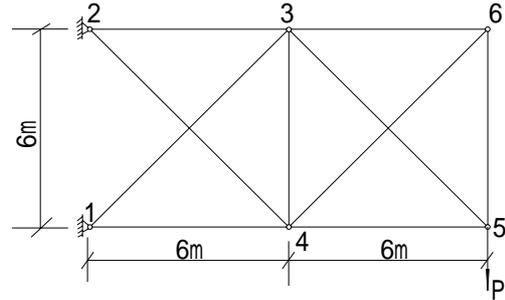


图 1 平面桁架结构

Fig.1 Plane truss structures

解: 对该结构进行可靠性分析, 共找到 3 条主要强度失效路径(8 - 10 - 7, 8 - 10 - 9, 8 - 10 - 3)。强度、刚度失效路径和失效历程各阶段的安全余量见表 1。将表 1 中给出的各失效模式的安全余量变换成用相互独立的标准正态变量 \bar{Z} 表示的等效安全余量, 变量对应关系为: $Z_1 \rightarrow R_8$, $Z_2 \rightarrow R_{10}$, $Z_3 \rightarrow R_7$, $Z_4 \rightarrow R_9$, $Z_5 \rightarrow R_3$, $Z_6 \rightarrow P$ 。同时考虑结构系统失效各阶段强度和刚度的可靠性分析见表 2。

表 1 失效路径及失效历程各阶段的安全余量

Table 1 Failure paths and safe margins at each failure state

失效形式	失效路径	失效历程各阶段的安全余量
强度失效	8 - 10 - 7	$M_8 = R_8 - 0.71567P$
		$M_{10(8)} = R_{10} + 0.10355R_8 - 0.70711P$
		$M_{7(8,10)} = R_7 + R_8 - 1.4142P$
	8 - 10 - 9	$M_{9(8,10)} = R_9 + R_{10} - 1.4142P$
8 - 10 - 3	$M_{3(8,10)} = R_3 + 0.70711R_8 - 2P$	
刚度失效	初始结构	$G_5 = \delta^a - 0.724336 \times 10^{-4} P$
	8	$G_{5(8)} = \delta^a - 0.921379 \times 10^{-4} P + 0.27532 \times 10^{-4} R_8$
	8 - 10	$G_{5(8,10)} = \delta^a - 1.13856 \times 10^{-4} P + 0.3071 \times 10^{-4} R_8 + 0.3071 \times 10^{-4} R_{10}$

表 2 同时考虑结构系统失效各阶段强度和刚度的系统失效概率

Table 2 System failure probabilities of strength and stiffness at each failure state

失效阶段	失效形式	概率表示形式	等效安全余量	失效概率
初始结构	强度	$P(M_{7(8,10)} \leq 0 \cap M_{10(8)} \leq 0 \cap M_8 \leq 0)$	$M_1^e = 0.272Z_1 + 0.06Z_2 + 0.523Z_3 - 0.805Z_6 + 4.439$	1.388E-05
		$P(M_{9(8,10)} \leq 0 \cap M_{10(8)} \leq 0 \cap M_8 \leq 0)$	$M_2^e = 0.272Z_1 + 0.06Z_2 + 0.523Z_4 - 0.805Z_6 + 4.439$	
		$P(M_{3(8,10)} \leq 0 \cap M_{10(8)} \leq 0 \cap M_8 \leq 0)$	$M_3^e = 0.121Z_1 + 0.06Z_2 + 0.654Z_5 - 0.744Z_6 + 4.808$	
	刚度	$P(G_5 \leq 0)$	$M_4^e = -Z_6 + 4.204$	
一级失效	强度	$P(M_{7(8,10)} \leq 0 \cap M_{10(8)} \leq 0 / M_8 \leq 0)$	$M_5^e = -0.027Z_1 - 0.08Z_2 - 0.757Z_3 - 0.646Z_6 + 3.754$	2.345E-03
		$P(M_{9(8,10)} \leq 0 \cap M_{10(8)} \leq 0 / M_8 \leq 0)$	$M_6^e = -0.027Z_1 - 0.08Z_2 - 0.757Z_4 - 0.646Z_6 + 3.754$	
		$P(M_{3(8,10)} \leq 0 \cap M_{10(8)} \leq 0 / M_8 \leq 0)$	$M_7^e = 0.142Z_1 - 0.078Z_2 - 0.844Z_5 + 0.512Z_6 + 4.176$	
	刚度	$P(G_{5(8)} \leq 0 / M_8 \leq 0)$	$M_8^e = 0.257Z_1 - 0.967Z_6 + 2.854$	
二级失效	强度	$P(M_{7(8,10)} \leq 0 / M_{10(8)} \leq 0 \cap M_8 \leq 0)$	$M_9^e = -0.08Z_1 + 0.401Z_2 - 0.827Z_3 + 0.385Z_6 + 1.405$	1.947E-01
		$P(M_{9(8,10)} \leq 0 / M_{10(8)} \leq 0 \cap M_8 \leq 0)$	$M_{10}^e = -0.08Z_1 + 0.401Z_2 - 0.827Z_4 + 0.385Z_6 + 1.405$	
		$P(M_{3(8,10)} \leq 0 / M_{10(8)} \leq 0 \cap M_8 \leq 0)$	$M_{11}^e = 0.002Z_1 + 0.322Z_2 - 0.9Z_5 + 0.295Z_6 + 2.171$	
	刚度	$P(G_{5(8,10)} \leq 0 / M_{10(8)} \leq 0 \cap M_8 \leq 0)$	$M_{12}^e = 0.092Z_1 + 0.494Z_2 - 0.865Z_6 + 1.824$	

4 结论

(1) 从算例可知，随着失效元相继失效，不完整结构系统失效概率在上升。这样分析符合结构在变成机构之前在使用各阶段可靠性的真实情况。为设计人员了解结构在使用各阶段的可靠性状态、进行设计和分析提供了依据。

(2) 本文提出的不完整结构在失效各阶段的可靠性分析方法，为不完整结构能否继续经济、合理的使用及制定维修策略提供了理论依据。这必将带来较强的经济效益。

参考文献：

[1] Bucher C G. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems [J]. Structural Safety, 1990, 7: 57~66.

[2] Moses F. New directions and research needs in system reliability research [J]. Structural Safety, 1990,7: 93~100.

[3] Moses F. System reliability developments in structural engineering [J]. Structural Safety, 1982, 1: 3~13.

[4] Ditlevsen O. Narrow reliability bounds for structural system [J]. Struct. Mech., 1979,7(4): 453~472.

[5] Thoft-Christensen P, Baker M J. Structural reliability theory and its applications [M]. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

[6] 吕震宙, 冯元生. 结构刚度可靠性分析方法[J]. 航空

学报, 1994, 15(8): 910~916.

Lu Zhenzhou, Feng Yuansheng. Reliability analysis method of structural stiffness [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1994, 15(8): 910~916. (in Chinese)

[7] 安伟光. 结构系统可靠性和基于可靠性的优化设计 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1997.

An Weiguang. Structural systems reliability and optimization design based on reliability [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1997. (in Chinese)

[8] 车维毅, 杨丽娜. 同时考虑桁架结构强度和刚度的可靠性分析[J]. 工程力学(增刊), 2000, (2): 110~114.

Che Weiyi, Yang Lina. Reliability analysis of truss structures considering strength and stiffness [J]. Engineering Mechanics (Supplement), 2000, (2): 110~114. (in Chinese)

[9] Thoft-Christensen P, Murotsu Y. Application of structural systems reliability theory [M]. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986.

[10] 董聪. 现代结构系统可靠性理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

Dong Cong. Modern structural system reliability theory and its applications [M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese)

[11] 赵国藩, 金伟良, 贡金鑫. 结构可靠度理论[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000.

Zhao Guofan, Jin Weiliang, Gong Jinxin. Structural reliability theory [M]. Beijing: China Construction Industry Press, 2000. (in Chinese)