

文章编号: 1000-4750(2007)07-0016-07

# 成层介质中平面内自由波场的一维化时域算法

\*刘晶波, 王 艳

(清华大学土木工程系, 北京 100084)

**摘 要:** 提出了一种弹性水平成层半空间中平面内波动斜入射时自由波场时域计算的一维化有限元方法。首先, 基于弹性波在斜入射情形下的传播特点对计算区域进行自动虚拟网格划分。然后将集中质量有限元法和中心差分法相结合建立节点的二维运动方程组, 并根据采用的离散化准则和显式有限元法的特点将其转化为一维方程组。求解此方程组, 即得到自由场中竖向一系列节点的运动。最后根据行波的传播规律得到全部自由波场。以 P 波为例给出了理论分析和数值算例。结果表明, 该方法不仅简单实用, 而且具有较高的精度和良好的稳定性。

**关键词:** 成层介质; 平面内波动; 斜入射; 时域算法; Snell 定律

**中图分类号:** TU311.3 **文献标识码:** A

## A 1D TIME-DOMAIN METHOD FOR IN-PLANE WAVE MOTION OF FREE FIELD IN LAYERED MEDIA

\*LIU Jing-bo, WANG Yan

(Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** A 1D finite element method in time domain is developed, which is used to calculate the in-plane wave motion of free field in elastic layered semispace by oblique seismic incidence. First, the layered semispace is discretized virtually according to the propagation characteristic of elastic wave. Then, the finite element method with lumped mass and the central difference method are combined together to establish the 2D wave motion equations. On the basis of the discretization principle and by the advantage of the explicit finite element method, the 2D wave motion equations can be transformed into 1D equations. By solving the 1D equations, the displacement of nodes in one vertical line can be obtained. Finally, the wave motions of the whole free field are determined on the basis of the characteristic of traveling wave. As an example, P-wave is assumed as the incident wave. Theoretical analysis and numerical results demonstrate that the proposed method possesses high accuracy and good stability.

**Key words:** multi-layered space; in-plane wave; oblique incidence; time-domain method; Snell law

在大型结构的抗震分析中, 地震波输入是最关键并且亟待解决的问题之一<sup>[1,2]</sup>。在一般工程的抗震设计中, 经常将入射地震波简化为竖直向上入射的体波。而事实上, 由于传播途径和局部场地条件的复杂性, 地震波在到达工程场地时的入射方向并不

一定总是竖直向上。考虑到不同方向的入射体波产生的结构反应与竖直入射的结果有明显差别<sup>[3]</sup>, 为了确保大型结构在地震作用下的安全性, 有必要在抗震设计中考虑地震波斜入射的影响<sup>[4]</sup>。

在过去几十年中, 研究者对于不同地形情况、

收稿日期: 2005-12-12; 修改日期: 2006-12-12

基金项目: 国家自然科学基金(50478014); 国家 973 计划(2002CB412706); 北京市自然科学基金重点项目(8061003)联合资助

作者简介: \*刘晶波(1956), 男, 辽宁人, 教授, 博士, 博导, 主要从事结构工程和防灾减灾工程研究(E-mail: liujb@tsinghua.edu.cn);

王 艳(1979), 女, 山东人, 博士生, 主要从事结构抗震研究(E-mail: yanwang03@mails.thu.edu.cn).

不同土层介质模型和不同入射波条件下的地震地面运动问题进行了广泛研究<sup>[5,6]</sup>, 获得了解析解或者半解析解, 但往往是基于简单的或者高度简化的介质模型获得的。在实际工程中, 由于地层介质分布的复杂性, 对波场的解析求解几乎是不可能的。因此, 应用数值方法, 如有限元法, 研究不同入射波条件下复杂介质中的波动问题已经成为主要的研究方向。

地震波斜入射时成层半空间自由波场的计算可以在频域实现<sup>[7,8]</sup>。频域方法基于传递矩阵, 在频率-波数域进行求解, 为获得地震动时程需要进行 Fourier 正变换和逆变换。基于连续介质的频域分析方法的计算精度和时域有限元法往往是不匹配的, 为了直接和方便地应用时域有限元法进行大型结构-地基系统的地震反应分析, 需要发展精度高和实用性强的时域方法来研究斜入射自由波场。

根据成层半空间中平面波的传播规律, 采用沿介质水平方向虚拟的有限元网格划分, 给出了一种成层介质中出平面 SH 波斜入射时自由波场计算的一维化时域有限元方法<sup>[9]</sup>。与出平面问题相比, 对于二维离散模型中的平面内波动(P-SV 型)问题, 由于节点位移是矢量, 因此不同分量之间的相互作用使得波动问题变得更为复杂。本文研究了 P 波斜入射时二维自由波场计算问题, 同时进行了算法的精度和稳定性分析。

## 2 计算区域的有限元离散化方案

### 2.1 斜入射情形下弹性波传播的特点

设  $x$  轴为水平方向,  $y$  轴为竖直方向, P 波的入射角即传播方向与  $y$  轴的夹角为  $\theta$ 。当 P 波斜入射时, 在两种介质交界面同时产生反射和折射的 SV 波和 P 波, 如图 1 所示。根据 Snell 定律<sup>[10]</sup>, 有:

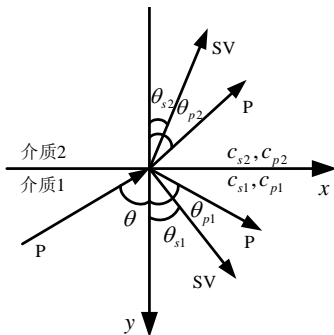


图 1 P 波在介质交界面的反射和折射

Fig.1 Reflection and refraction of P wave on the interface

$$\frac{c_{p1}}{\sin \theta} = \frac{c_{s1}}{\sin \theta_{s1}} = \frac{c_{p1}}{\sin \theta_{p1}} = \frac{c_{s2}}{\sin \theta_{s2}} = \frac{c_{p2}}{\sin \theta_{p2}} = c_x \quad (1)$$

其中,  $c_s$  和  $c_p$  分别为 S 波和 P 波在介质中的传播速度;  $c_x$  为水平视波速, 如图 2 所示。

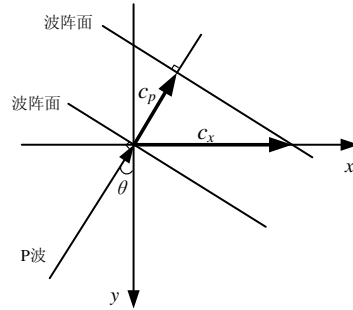


图 2 波速和水平视波速的关系

Fig.2 Relation between wave velocity and horizontal apparent wave velocity

在弹性介质中, 沿水平方向( $x$  轴方向)传播的 P 波为行波, 速度为视波速  $c_x$ , 因此波场可以表示为:

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{u}\left(0, y, t - \frac{x}{c_x}\right) \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{u} = \{u_x, u_y\}^T$  为波场的位移矢量,  $u_x$  和  $u_y$  分别为 P 波沿  $x$  轴和  $y$  轴的位移分量。

若时间离散步长为  $\Delta t$ , 则由式(2)可以得到如下关系式:

$$\mathbf{u}(x + jc_x \Delta t, y, t) = \mathbf{u}(x, y, t - j \Delta t) \quad j \in (-\infty, \infty) \quad (3)$$

### 2.2 计算区域的网格划分和一维化方法的建立

水平成层半空间的有限元离散化模型如图 3 所示, 水平向网格尺寸为  $\Delta x$ , 竖向网格尺寸为  $\Delta y$ , 将坐标为  $(m\Delta x, n\Delta y)$  的节点记为  $(m, n)$ 。如果用  $p$  表示时间节点序号, 则该节点在  $t = p\Delta t$  时刻的自由场位移矢量记为  $\mathbf{u}_{m,n}^p$ , 即  $\mathbf{u}_{m,n}^p = \mathbf{u}(m\Delta x, n\Delta y, p\Delta t)$ 。

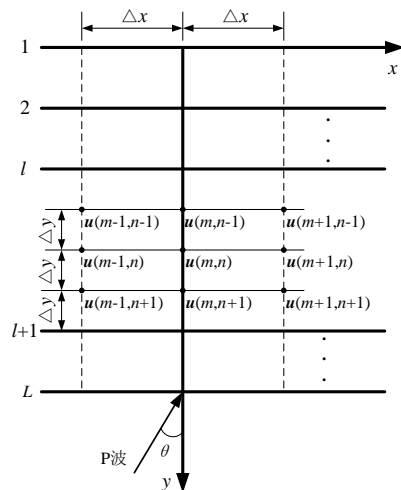


图 3 水平成层半空间的有限元离散化模型

Fig.3 Finite element model of the layered half-space

一般有限元法中,节点( $m, n$ )在  $p\Delta t$  时刻的运动方程为:

$$\sum_{i=m-1}^{m+1} \sum_{j=n-1}^{n+1} (\mathbf{M}_{i,j} \ddot{\mathbf{u}}_{i,j}^p + \mathbf{C}_{i,j} \dot{\mathbf{u}}_{i,j}^p + \mathbf{K}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j}^p) = \mathbf{0} \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  分别为 2 阶  $\times$  2 阶的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵。

由式(4)可知,节点( $m, n$ )的运动只和该节点及与该节点直接相连的节点运动有关<sup>[11]</sup>。根据式(4)和弹性介质中行波传播的特点确定以下有限元离散化方案:竖向网格尺寸  $\Delta y$  ( $\Delta y$  可以不同,为表示方便,统一用  $\Delta y$  表示) 取满足精度要求的任意值,而沿水平  $x$  轴的网格尺寸相等,均为  $\Delta x$ , 且:

$$\Delta x = c_x \Delta t \quad (5)$$

则根据式(3),当  $j = \pm 1$  时,有:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{m-1,n}^p = \mathbf{u}_{m,n}^{p+1} \\ \mathbf{u}_{m+1,n}^p = \mathbf{u}_{m,n}^{p-1} \end{cases} \quad (6)$$

依此类推,可以得到:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{m-1,n-1}^p = \mathbf{u}_{m,n-1}^{p+1} \\ \mathbf{u}_{m+1,n-1}^p = \mathbf{u}_{m,n-1}^{p-1} \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{u}_{m-1,n+1}^p = \mathbf{u}_{m,n+1}^{p+1} \\ \mathbf{u}_{m+1,n+1}^p = \mathbf{u}_{m,n+1}^{p-1} \end{cases} \quad (7)$$

同理,节点的速度和加速度同样存在上述关系。因此,运动方程(4)可以改写为:

$$\sum_{j=n-1}^{n+1} \left( \sum_{k=p-1}^{p+1} (\bar{\mathbf{M}}_{m,j} \ddot{\mathbf{u}}_{m,j}^k + \bar{\mathbf{C}}'_{m,j} \dot{\mathbf{u}}_{m,j}^k + \bar{\mathbf{K}}'_{m,j} \mathbf{u}_{m,j}^k) \right) = \mathbf{0} \quad (8)$$

由式(8)可见,节点( $m, n$ )在  $p$  时刻的运动方程只包含  $m$  列节点在相邻时刻的运动,因此由式(8)就可以得到  $m$  列节点的运动。实际计算中可取  $m=0$ ,在求得 0 列节点(即  $y$  轴上节点)运动后,根据式(2)确定全部成层半空间中的自由波场。这样,斜入射自由波场计算的二维问题就转化为一维问题求解。

### 3 人工边界和波动输入

#### 3.1 人工边界的设置

在应用有限元法分析地震波动散射问题时,必须从半无限介质中切取出有限的计算区,并在计算区边界上引入合适的人工边界条件,以达到消除反射、模拟波动透射过程的目的<sup>[12]</sup>。

由于粘性边界<sup>[13]</sup>具有使用方法简单、直观,概念清晰的特点,所以本文在计算区的底部设置了粘性边界。对于二维平面内问题,粘性边界相当于在边界的切向和法向分别设置一系列粘性阻尼器。当地震波斜直入射时,阻尼器系数的一般表达式为:

$$\mathbf{C}_T = \rho c_s, \quad \mathbf{C}_N = \rho c_p \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{C}_T$  和  $\mathbf{C}_N$  分别表示人工边界节点上平面内切向和法向的阻尼器系数;  $\rho$  为介质质量密度。

和出平面问题不同的是,对于平面内波动问题,任何一种波斜入射时,都存在反射的 P 波和 SV 波,由于上述两种波的波速不同,所以不能被粘性边界同时吸收,计算结果存在误差。但是一般来讲,采用式(9)给出的粘性边界可以得到满意的结果。如果要求更高阶计算精度,建议设置透射人工边界<sup>[14,15]</sup>,可以采用高阶透射边界以更精确地模拟波动的透射过程。

#### 3.2 边界上的波动输入

对于人工边界上的波动输入问题,本文采用将输入地震动转化为作用于人工边界上的等效荷载的方法来实现<sup>[16]</sup>,即将地震波动输入问题转化为波源问题。

设  $\mathbf{u}_0(x, y, t)$  为已知的下卧弹性半空间中入射 P 波波场,在设置的粘性边界节点 B 上产生的位移矢量为  $\mathbf{u}_0(x_B, y_B, t) = \{u_{0x}, u_{0y}\}_B^T$ , 应力矢量为  $\boldsymbol{\sigma}_0(x_B, y_B, t) = \{\tau_{0x}, \sigma_{0y}\}_B^T$ 。为实现波动输入,设在人工边界节点 B 上施加的等效力矢量为  $\mathbf{F}_B(t)$ , 则

$$\mathbf{F}_B(t) = \boldsymbol{\sigma}_0(x_B, y_B, t) + \mathbf{C}_B \dot{\mathbf{u}}_0(x_B, y_B, t) \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{F}_B = \{F_{Bx}, F_{By}\}_B^T$ ;  $\mathbf{C}_B = \{C_{Bx}, C_{By}\}_B^T$ 。

因此,只要在边界节点上施加上述的等效荷载,即可以完成边界上波动的输入。

### 4 斜入射自由波场的计算

根据方程(4),对于弹性无阻尼问题, $y$  轴上的节点( $0, n$ )在任一时刻  $p\Delta t$  的运动方程为:

$$\mathbf{M}_{0,n} \ddot{\mathbf{u}}_{0,n}^p + \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=n-1}^{n+1} \mathbf{K}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j}^p = \mathbf{0} \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (11)$$

其中,  $\mathbf{M}_{0,n}$  为集中于节点( $0, n$ )的质量;  $\mathbf{K}_{i,j}$  为刚度矩阵,表示节点( $0, n$ )和节点( $i, j$ )之间的刚度系数。

对于自由表面上的节点( $0, 0$ ),运动方程为:

$$\mathbf{M}_{0,0} \ddot{\mathbf{u}}_{0,0}^p + \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=0}^1 \mathbf{K}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j}^p = \mathbf{0} \quad (12)$$

对于粘性边界上的节点( $0, N$ ),运动方程为:

$$\mathbf{M}_{0,N} \ddot{\mathbf{u}}_{0,N}^p + (\mathbf{C}_B \Delta x) \dot{\mathbf{u}}_{0,N}^p + \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=N-1}^N \mathbf{K}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j}^p = \mathbf{F}_B^p \Delta x \quad (13)$$

其中,  $\mathbf{C}_B$  和  $\mathbf{F}_B^p = \mathbf{F}_B(p\Delta t)$  分别根据式(9)和式(10)计算

得到。

将  $\ddot{\mathbf{u}}$  用中心差分近似, 即:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{0,n}^p = \frac{\mathbf{u}_{0,n}^{p+1} - 2\mathbf{u}_{0,n}^p + \mathbf{u}_{0,n}^{p-1}}{\Delta t^2} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

由式(6)可得:

$$\mathbf{u}_{-1,n}^p = \mathbf{u}_{0,n}^{p+1}, \quad \mathbf{u}_{1,n}^p = \mathbf{u}_{0,n}^{p-1} \quad (15)$$

将式(14)和式(15)代入式(11)、式(12)和式(13),

并简记  $\mathbf{u}_{0,n} = \mathbf{u}_n$ ,  $M_{0,n} = M_n$ , 整理得到:

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{M_0} \mathbf{K}_{-1,0} \right) \mathbf{u}_0^{p+1} + \frac{\Delta t^2}{M_0} \mathbf{K}_{-1,1} \mathbf{u}_1^{p+1} = \\ & \left( 2\mathbf{I} - \frac{\Delta t^2}{M_0} \mathbf{K}_{0,0} \right) \mathbf{u}_0^p - \frac{\Delta t^2}{M_0} \mathbf{K}_{0,1} \mathbf{u}_1^p - \\ & \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{M_0} \mathbf{K}_{1,0} \right) \mathbf{u}_0^{p-1} - \frac{\Delta t^2}{M_0} \mathbf{K}_{1,1} \mathbf{u}_1^{p-1} \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta t^2}{M_n} \mathbf{K}_{-1,n-1} \mathbf{u}_{n-1}^{p+1} + \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{M_n} \mathbf{K}_{-1,n} \right) \mathbf{u}_n^{p+1} + \\ & \frac{\Delta t^2}{M_n} \mathbf{K}_{-1,n+1} \mathbf{u}_{n+1}^{p+1} = - \frac{\Delta t^2}{M_n} \mathbf{K}_{0,n-1} \mathbf{u}_{n-1}^p + \\ & \left( 2\mathbf{I} - \frac{\Delta t^2}{M_n} \mathbf{K}_{0,n} \right) \mathbf{u}_n^p + \frac{\Delta t^2}{M_n} \mathbf{K}_{0,n+1} \mathbf{u}_{n+1}^p - \\ & \frac{\Delta t^2}{M_n} \mathbf{K}_{1,n-1} \mathbf{u}_{n-1}^{p-1} - \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{M_n} \mathbf{K}_{1,n} \right) \mathbf{u}_n^{p-1} + \\ & \frac{\Delta t^2}{M_n} \mathbf{K}_{1,n+1} \mathbf{u}_{n+1}^{p-1} \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (16b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta t^2}{M_N} \mathbf{K}_{-1,N-1} \mathbf{u}_{N-1}^{p+1} + \left[ \mathbf{I} + \frac{(\mathbf{C}_B \Delta x) \Delta t}{2M_N} + \frac{\Delta t^2}{M_N} \mathbf{K}_{-1,N} \right] \mathbf{u}_N^{p+1} = \\ & - \frac{\Delta t^2}{M_N} \mathbf{K}_{0,N-1} \mathbf{u}_{N-1}^p + \left( 2\mathbf{I} - \frac{\Delta t^2}{M_N} \mathbf{K}_{0,N} \right) \mathbf{u}_N^p - \\ & \left[ \mathbf{I} - \frac{(\mathbf{C}_B \Delta x) \Delta t}{2M_N} + \frac{\Delta t^2}{M_N} \mathbf{K}_{1,N} + \frac{\Delta t^2}{M_N} \mathbf{K}_{1,N-1} \right] \mathbf{u}_N^{p-1} + \\ & \frac{\Delta t^2}{M_N} \mathbf{F}_B^p \Delta x \end{aligned} \quad (16c)$$

方程(16)可以写成矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0,0} & \mathbf{A}_{0,1} & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{1,0} & \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mathbf{A}_{N-1,N-2} & \mathbf{A}_{N-1,N-1} & \mathbf{A}_{N-1,N} \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{A}_{N,N-1} & \mathbf{A}_{N,N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0^{p+1} \\ \mathbf{u}_1^{p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N-1}^{p+1} \\ \mathbf{u}_N^{p+1} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{D}_0 \\ \mathbf{D}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{D}_{N-1} \\ \mathbf{D}_N \end{Bmatrix} \quad (17)$$

其中, 方程组左端系数矩阵和右端系数向量由式(16)确定, 例如:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{0,0} &= \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{M_0} \mathbf{K}_{-1,0}, \quad \mathbf{A}_{0,1} = \frac{\Delta t^2}{M_0} \mathbf{K}_{-1,1}, \quad \mathbf{A}_{1,0} = \frac{\Delta t^2}{M_1} \mathbf{K}_{-1,0}, \\ \mathbf{A}_{1,1} &= \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{M_1} \mathbf{K}_{-1,1}, \quad \mathbf{A}_{1,2} = \frac{\Delta t^2}{M_1} \mathbf{K}_{-1,2}, \dots, \\ \mathbf{A}_{N,N-1} &= \frac{\Delta t^2}{M_N} \mathbf{K}_{-1,N-1}, \\ \mathbf{A}_{N,N} &= \mathbf{I} + \frac{(\mathbf{C}_B \Delta x) \Delta t}{2M_N} + \frac{\Delta t^2}{M_N} \mathbf{K}_{-1,N} \end{aligned}$$

$\mathbf{D}_i = \{d_{ix}, d_{iy}\}^T$ ;  $\mathbf{I}$  为 2 阶单位矩阵。

由方程组(17)可以看出, 等式左边的系数矩阵是稀疏的三对角矩阵, 等式右边的系数  $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_n, \dots, \mathbf{D}_N$  只与节点(0, N)输入的等效荷载及节点(0, n)(n=0, 1, ..., N)在  $p$  时刻及其以前时刻的位移有关。因此, 求解上述方程组就可以得到  $y$  轴上各节点在  $(p+1)$  时刻的位移, 进而确定全部自由波场。

由上述推导可知, 本文提出的一维化时域算法在有限元分析的意义下是精确的, 即给出了真实的二维有限元模型的解。

另外, 出平面 SH 波斜入射时自由波场计算的稳定性条件<sup>[9]</sup>同样适用于平面内波动问题, 即稳定性条件为:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta y}{c_p} \quad (18)$$

因此, 根据竖向有限元网格尺寸就可以确定数值计算的稳定性条件。

## 5 精度分析

考虑时间步长影响的集中质量模型中平面内 P 波传播的频散方程为<sup>[17]</sup>:

$$\sin^2 \left( \frac{\omega \Delta t}{2} \right) = 2 \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2 \left( \frac{c_p}{\Delta x} \right)^2 (Q_1 + \sqrt{Q_2^2 + Q_3^2}) \quad (19)$$

而:

$$Q_1 = \frac{1 + rsp}{3} [3(s_1^2 + \beta s_2^2) - 2(\beta + 1)s_1^2 s_2^2] \quad (20a)$$

$$Q_2 = \frac{1-rsp}{3}[3(s_1^2 - \beta s_2^2) + 2(\beta-1)s_1^2 s_2^2] \quad (20b)$$

$$Q_3 = 2\sqrt{\beta}(1-rsp)s_1 c_1 s_2 c_2 \quad (20c)$$

其中,  $c_s$  和  $c_p$  分别为 S 波和 P 波在连续介质中的传播速度;  $\omega$  为 P 波的频率;  $\nu$  为泊松比;  $k$  为波数;  $\theta$  为入射角;  $\beta=(\Delta x / \Delta y)^2$ ;  $s_1=\sin((k\Delta x \sin\theta) / 2)$ ;  $s_2=\sin((k\Delta y \cos\theta) / 2)$ ;  $c_1=\cos((k\Delta x \sin\theta) / 2)$ ;  $c_2=\cos((k\Delta y \cos\theta) / 2)$ ;  $rsp=(c_s/c_p)^2=(1-2\nu)/(2(1-\nu))$ 。

引入参数:

$$\alpha = \frac{c_p \Delta t}{\Delta y} \quad (21)$$

根据式(18), 稳定性条件要求:

$$\alpha \leq 1 \quad (22)$$

根据式(19), 得:

$$\frac{c}{c_p} = \frac{2}{k\Delta y} \frac{\omega}{\omega_c} \quad (23)$$

且:

$$\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{1}{\alpha} \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \sqrt{Q_1 + \sqrt{Q_2^2 + Q_3^2}}\right) \quad (24)$$

其中,  $c$  为 P 波在离散模型中的传播速度;  $\omega_c$  为截止频率,  $\omega_c=2c_p/\Delta y$ 。

根据式(23)和式(24), 可以得到 P 波以角度  $\theta$  入射时  $c/c_p$  与  $\omega/\omega_c$  的关系, 如图 4 所示。图 4(a) 给出了  $\alpha=0.5$  时, 不同入射角  $\theta$  对应的频散曲线, 并且和 P 波垂直入射的情况进行了比较; 图 4(b) 给

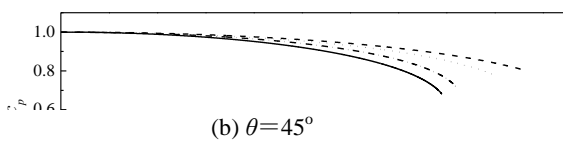
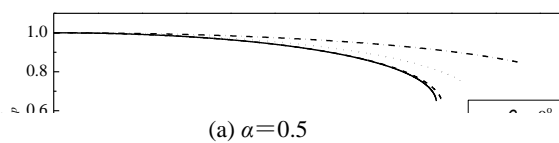


图 4 不同方向入射波在有限元离散模型中的传播速度  
Fig.4 Propagation velocity of input P wave with different incident angles in the finite element model

出了  $\theta=45^\circ$  时, 不同的时间步长参数  $\alpha$  对应的频散曲线, 并且和固定方形网格的情况(且  $\alpha=0$ )进行了比较。

在有限元计算中, 为了保证波动模拟的精度, 有限单元尺寸应满足以下离散化准则:

$$\Delta \leq \left(\frac{1}{6} \sim \frac{1}{10}\right) \lambda \quad (25)$$

其中,  $\Delta$  为有限单元尺寸,  $\lambda$  为波长。

而:

$$\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{2\pi f}{2c_p/\Delta} = \pi \frac{\Delta}{\lambda} \quad (26)$$

因此, 当有限单元尺寸满足式(25)给出的离散化准则时,  $\omega/\omega_c \leq (\pi/6 \sim \pi/10)$ 。由图 4 可见, 此时  $c/c_p$  非常接近于 1, 即 P 波在离散模型中的传播速度和在连续模型中的速度基本相同。所以, 本方法对于不同方向的入射波都有很高的精度。

## 6 算例分析

为验证本文提出的一维化时域方法的精度和实用性, 下面对水平成层半空间中 P 波倾斜入射时的自由场进行计算分析, 模型如图 5 所示。其中上部覆盖层的介质参数为: 质量密度  $\rho_1=1000\text{kg/m}^3$ , S 波波速  $c_{s1}=500\text{m/s}$ , P 波波速  $c_{p1}=866\text{m/s}$ ; 下卧半无限空间的介质参数为: 质量密度  $\rho_2=1500\text{kg/m}^3$ , 剪切波波速  $c_{s2}=1000\text{m/s}$ , P 波波速  $c_{p2}=1732\text{m/s}$ 。

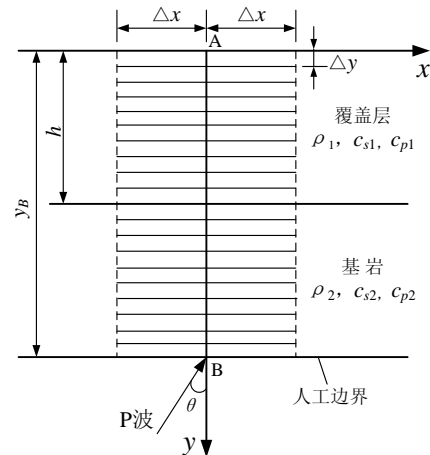


图 5 单覆盖层模型及其离散化示意图

Fig.5 Model of single overburden layer and its discretization

取覆盖层厚度  $h=50\text{m}$ , 计算区范围  $y_B=100\text{m}$ 。y 方向的有限单元尺寸  $\Delta y=5\text{m}$ , x 方向的有限单元尺寸  $\Delta x$  根据式(5)确定。在满足稳定性条件的情况下, 取离散时间步长  $\Delta t=0.001\text{s}$ 。入射 P 波为持时 0.5s 的单位脉冲, 其位移时程如图 6 所示。

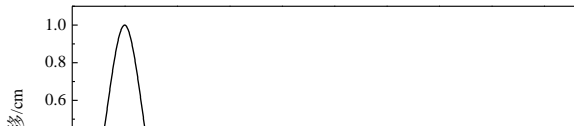
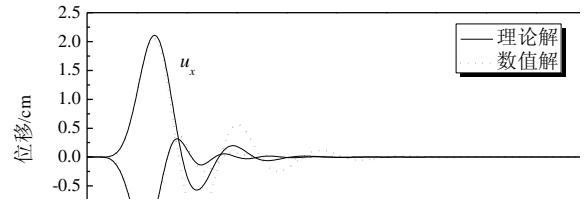


图6 观测点 B(0,  $y_b$ ) 的入射波位移时程

Fig.6 Displacement time history of incident P wave at observation point B (0,  $y_b$ )

图7给出了P波以不同角度入射时自由表面观测点 A(0, 0) 的位移时程, 其中理论解根据频域解采用 Fourier 变换技术得到<sup>[18]</sup>。可以看出, 对于P波斜入射问题, 本文算法具有很高的精度。当入射角  $\theta$  很小时,  $\Delta x$  将变得很大, 但图7(a)给出的结果表明, 本文方法仍可以给出精度很高的模拟结果。

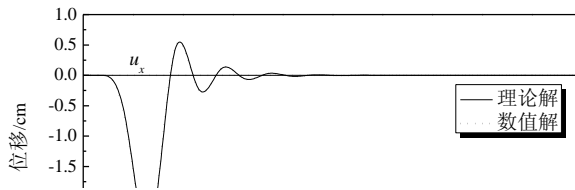


(d)  $\theta=60^\circ$

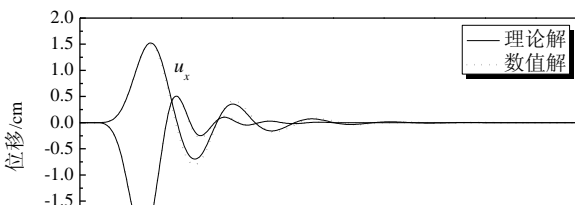
图7 P波斜入射时观测点 A(0, 0) 的位移时程

Fig.7 Displacement time history of observation point A(0, 0) excited by incident P wave with different angles

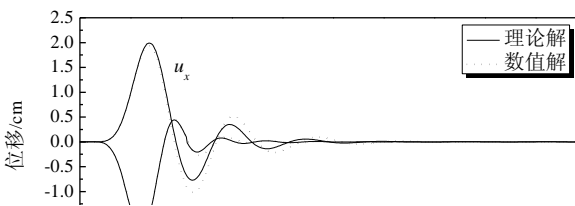
为了直观地表示本算法对于不同入射角的模拟精度, 分别采用理论方法和本文算法给出自由表面位移幅值随入射角的变化曲线, 如图8所示。可以看出, 本文算法精度随着入射角  $\theta$  的增大有所降低, 这主要是由于式(9)给出的粘性边界在大角度入射时误差较大的原因引起的。在入射角较大时(超过  $60^\circ$ ), 建议采用精度更高的透射人工边界<sup>[14]</sup>。



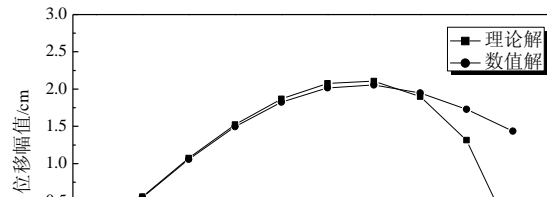
(a)  $\theta=0.001^\circ$



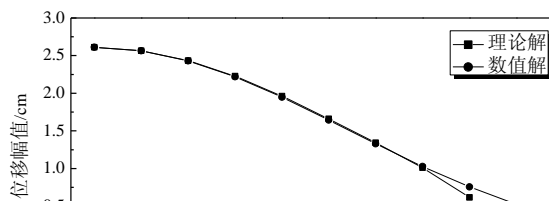
(b)  $\theta=30^\circ$



(c)  $\theta=45^\circ$



(a) x 方向



(b) y 方向

图8 观测点 A(0, 0) 的位移幅值随入射角的变化曲线

Fig.8 Peak displacements of observation point A(0, 0) by incident P wave with different angles

## 7 结论

本文以P波为例, 研究了平面内波动斜入射时水平成层半空间自由波场的一维化时域计算方法。

理论分析和数值算例表明,该方法不仅简单实用,而且具有较高的精度和良好的稳定性。

对于 SV 波斜入射的问题,本文的基本思路和处理方法同样适用,但是此时存在临界入射角  $\theta_c$ ,当入射角  $\theta > \theta_c$  时,会产生沿界面传播并且沿 y 轴向下衰减的不均匀波。与平面波相比,不均匀波的性质和传播规律将变得更复杂,对此需要开展进一步研究工作。

#### 参考文献:

- [1] 沈聚敏,周锡元,高小旺,刘晶波. 抗震工程学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000.  
Shen Jumin, Zhou Xiyuan, Gao Xiaowang, Liu Jingbo. Aseismic engineering [M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2000. (in Chinese)
- [2] 廖振鹏,郑天愉. 工程地震学在中国的发展[J]. 地球物理学报, 1997, 40(S1): 177~191.  
Liao Zhenpeng, Zheng Tianyu. Development of engineering seismology in China [J]. Acta Geophysica Sinica, 1997, 40(S1): 177~191. (in Chinese)
- [3] Wolf J P, Oberhuber P. Effects of horizontally traveling waves in soil-structure interaction [J]. Nuclear Engineering and Design, 1979, 57(2): 221~244.
- [4] 李山有,廖振鹏,周正华. 大型结构地震反应数值模拟中的波动输入[J]. 地震工程与工程振动, 2001, 6(2): 1~5.  
Li Shanyou, Liao Zhenpeng, Zhou Zhenghua. Wave motion input in numerical simulation of seismic response for large-scale structure [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2001, 6(2): 1~5. (in Chinese)
- [5] Pao Y H, Mow C C. The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration [M]. New York: Crane & Russak, 1973.
- [6] Liu D K, Gai B Z, Tao G Y. Applications of the method of complex function to dynamic stress concentration [J]. Wave Motion, 1982, (4): 293~304.
- [7] Haskell N A. The dispersion of surface waves in multi-layered media [J]. Bulletin of the Seismic Society of American, 1953, 43: 17~34.
- [8] Brekhovshikh L M. Waves in layered media [M]. New York: Academic Press Inc., 1980.
- [9] 刘晶波,王艳. 成层半空间出平面自由波场的一维化时域算法[J]. 力学学报, 2006, 38(2): 219~225.  
Liu Jingbo, Wang Yan. A 1D time-domain method for 2D wave motion in elastic layered half-space by antiplane wave oblique incidence [J]. Acta Mechanica Sinica, 2006, 38(2): 219~225. (in Chinese)
- [10] 黎在良,刘殿魁. 固体中的波[M]. 北京: 科学出版社, 1995.  
Li Zailiang, Liu Diankui. Wave motion in solid [M]. Beijing: Science Press, 1995. (in Chinese)
- [11] 廖振鹏. 近场波动问题的有限元解法[J]. 地震工程与工程振动, 1984, 4(2): 1~14.  
Liao Zhenpeng. The finite element solution of near-field wave motion problem [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1984, 4(2): 1~14. (in Chinese)
- [12] 廖振鹏. 近场波动的数值模拟[J]. 力学进展, 1997, 27(2): 193~212.  
Liao Zhenpeng. Numerical simulation of near-field wave motion [J]. Advances in Mechanics, 1997, 27(2): 193~212. (in Chinese)
- [13] Lysmer J, Kulemeyer R L. Finite dynamic model for infinite media [J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1969, 95: 759~877.
- [14] 廖振鹏,黄孔亮,杨柏坡. 暂态波透射边界[J]. 中国科学 A 辑, 1984, 14(6): 556~564.  
Liao Zhenpeng, Huang Kongliang, Yang Baipo. A transmitting boundary for transient wave analysis [J]. Science in China (Series A), 1984, 27(10): 1063~1076. (in English)
- [15] 廖振鹏. 透射边界与无穷远辐射条件[J]. 中国科学 E 辑, 2001, 31(3): 254~262.  
Liao Zhenpeng. Transmitting boundary and radiation conditions at infinity [J]. Science in China (Series E), 2001, 44(2): 177~186. (in English)
- [16] 刘晶波,吕彦东. 结构-地基动力相互作用问题分析的一种直接方法[J]. 土木工程学报, 1998, 31(3): 55~64.  
Liu Jingbo, Lu Yandong. A direct method for analysis of dynamic soil-structure interaction [J]. China Civil Engineering Journal, 1998, 31(3): 55~64. (in Chinese)
- [17] Liu Jingbo, Liao Zhenpeng. In-plane wave motion in finite element model [J]. Acta Mechanica Sinica, 1992, 8(1): 80~87.
- [18] 傅淑芳,刘宝诚. 地震学教程[M]. 北京: 地震出版社, 1991.  
Fu Shufang, Liu Baocheng. Seismology tutorial [M]. Beijing: Seismic Press, 1991. (in Chinese)