

文章编号: 1000-4750(2008)08-0230-05

残余应力平板表面裂纹的线弹簧模型

*段静波¹, 袁杰红², 杨 政²

(1. 国防科学技术大学航天与材料工程学院, 长沙 410073; 2. 国防科学技术大学指挥军官基础教育学院, 长沙 410073)

摘 要: 建立了残余应力平板表面裂纹的线弹簧模型, 利用边裂纹权函数得到了裂纹表面上沿厚度非线性分布残余应力向线性分布转化的公式; 基于 Reissner 板理论和连续分布位错思想, 通过积分变换方法, 推导了问题的控制方程和应力强度因子表达式; 利用 Gauss-Chebyshev 方法给出了数值计算结果, 并与现有的有限元解进行了比较, 结果表明: 该模型简单有效, 而且精度较高。

关键词: 线弹簧模型; 表面裂纹; 残余应力平板; 权函数; 应力强度因子

中图分类号: O346.1 文献标识码: A

THE LINE-SPRING MODEL FOR SURFACE CRACKS IN A RESIDUALLY STRESSED PLATE

*DUAN Jing-bo¹, YUAN Jie-hong², YANG Zheng²

(1. College of Aerospace and Material Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Foundation-Educational College of Command Officer, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The line-spring model for surface cracks in a residually stressed plate is established in this paper firstly. Then the residual stress' transform formula from nonlinear to linear gradients along the crack surface is obtained using the edge-cracked weight function. Based on the Reissner's plate theory and continuously distributed dislocation, the integral transfer method is employed to formulate the governing equations and the expression of stress intensity factor. Numerical results solved by Gauss-Chebyshev method are presented and compared with those of the finite element method, showing that the line-spring model is simple, efficient and accurate.

Key words: line-spring model; surface crack; residually stressed plate; weight function; stress intensity factor

工程实际中大量的金属焊接结构不可避免地会存在焊接残余应力。同时, 由于工艺原因, 极易形成焊接缺陷, 且缺陷通常以表面裂纹(如图 1 所示)形式存在。在使用过程中, 表面裂纹将处于工作应力与残余应力相迭加的受力状态。由于残余应力的非线性分布特点, 大大增加了表面裂纹问题的求解难度。

目前, 有限元法^[1]是解决此类问题最有效的方法, 但其数据准备工作量大、运算所需时间长且费

用高。能否引入适当的物理模型使问题简化, 并给出具有足够精度的简便分析和计算方法, 显然是工程界十分关心的问题。

线弹簧模型法^[2-5]作为一种简单、经济有效且精度较高的求解表面裂纹问题半解析方法, 特别适用于工程实际应用。但线弹簧模型以往通常用于解决均匀分布载荷作用下的表面裂纹问题, 当遇到含残余应力的表面裂纹问题时, 则不能直接应用。本文针对线弹簧模型这一不足, 将其推广应用于含残

收稿日期: 2007-01-19; 修改日期: 2007-07-20

作者简介: *段静波(1982-), 男, 山西晋城人, 硕士生, 主要从事结构失效分析与预防研究(E-mail: jane34@163.com);

袁杰红(1965-), 男, 湖南长沙人, 副教授, 博士, 主要从事断裂力学、结构失效分析与预防等研究(E-mail: yuanjiehong@163.com);

杨 政(1982-), 男, 湖南湘阴人, 硕士生, 主要从事载运工具结构优化与设计研究(E-mail: jaminyang@163.com)。

余应力平板表面裂纹问题的求解。

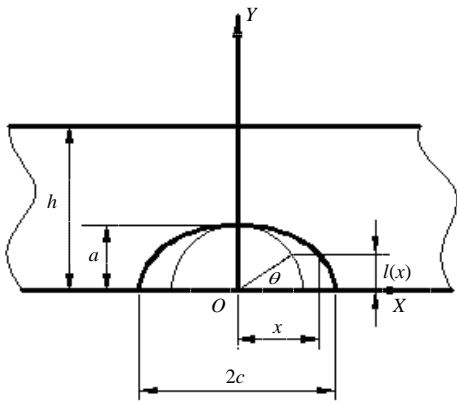


图1 表面裂纹示意图
Fig.1 The surface crack

1 非线性分布载荷作用下边裂纹板条应力强度因子

当边裂纹板条裂纹面上受非线性的分布载荷 $\sigma(y)$ 作用时(如图 2 所示), 其裂纹尖端应力强度因子可由下式获得^[6]:

$$K = \sqrt{h} \sigma g_r(\xi) \quad (1)$$

其中: $g_r(\xi) = \int_0^\xi \frac{\sigma(\bar{y})}{\sigma} m(\xi, \bar{y}) d\bar{y}$, $\bar{y} = y/h$ 为无量纲坐标, $\xi = a/h$ 为无量纲裂纹深度, σ 为参考应力, h 为板厚, $m(\xi, \bar{y})$ 为已知权函数^[7]。

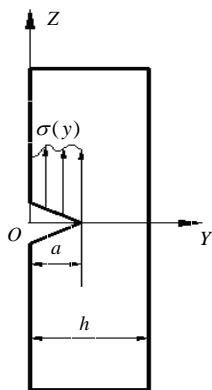


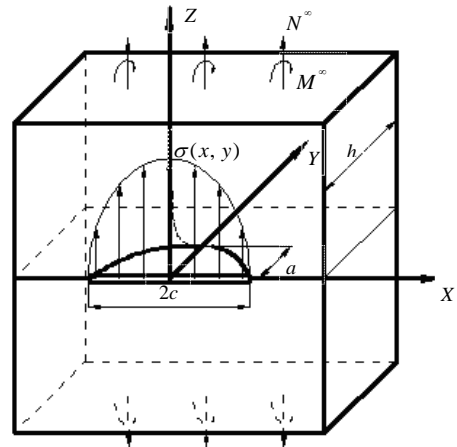
图2 边裂纹板条示意图
Fig.2 The edge-cracked strip

2 残余应力平板表面裂纹线弹簧模型

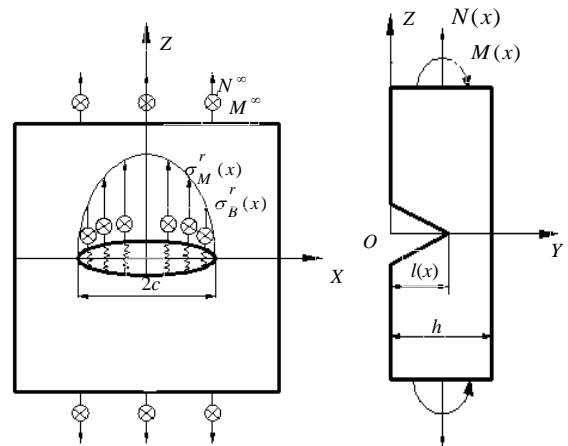
2.1 线弹簧模型描述

根据无限大平板表面裂纹线弹簧模型的描述^[2], 如图 3(a)所示在无穷远处单位宽度上作用有外力 N^∞ 和外力矩 M^∞ , 在裂纹面上作用有非线性

分布应力 $\sigma(x, y)$ 的半椭圆表面裂纹(a 、 c 分别为短轴半长和长轴半长)可以等效为长度为 $2c$ 的穿透裂纹图 3(b), 裂纹的间断处作用以分布的线弹簧, 裂纹面上作用的残余应力 $\sigma(x, y)$ 可以等效为一系膜力 $\sigma_M^r(x)$ 和弯矩 $\sigma_B^r(x)$; 线弹簧的本构关系可由相应位置的平面应变边裂纹板条($|x| \leq c$)所受的广义力 $N(x)$ 和 $M(x)$ 由于裂纹存在引起的附加广义位移的关系来确定(如图 3(c)所示)。表面裂纹前缘各点的应力强度因子等于相应位置的边裂纹板条的应力强度因子。



(a)



(b)

(c)

图3 残余应力平板表面裂纹线弹簧模型

Fig.3 The line-spring model of surface crack in a residually stressed plate

为便于使用边裂纹权函数, 引入无量纲坐标 $\bar{x} = x/c$, $\bar{y} = y/h$, $\sigma_M^\infty = N^\infty/h$, $\sigma_B^\infty = 6M^\infty/h^2$, $\sigma_M(\bar{x}) = N(\bar{x})/h$, $\sigma_B(\bar{x}) = 6M(\bar{x})/h^2$, h 为板厚。

2.2 边裂纹板条应力强度因子

对于图 3(c)所示的边裂纹板条, 其应力强度因子表达式为^[4]:

$$K_I = \sqrt{h}[\sigma(\bar{x})g(\xi) + \sigma(\bar{x})g(\xi)] \quad (2)$$

其中, $\xi = l(x)/h$, $l(x)$ 为板条边裂纹的尖端至椭圆长轴轴线之距离(如图 3(c)所示), $g_i(\xi)$ 为已知函数^[4], $i = M, B$ 。

2.3 裂纹面沿厚度非线性分布应力的线性化

由线弹簧模型描述可知, 沿无量纲坐标 \bar{x} 裂纹前缘应力强度因子与相应模拟线弹簧本构关系的边裂纹板条应力强度因子相等, 这意味着该模型忽略了线弹簧之间的相互作用。那么, 在此基础上就可以取平板在 $\bar{x} = \bar{x}_0$ ($|\bar{x}_0| \leq 1$) 处平行于 YOZ 面的一边裂纹板条(如图 4(a)所示)进行研究。

在线弹性范围内, 根据叠加原理, 裂纹的尖端应力强度因子可由两部分组成: 一部分是由远端载荷 N^∞ 和 M^∞ 引起的; 另一部分是由裂纹面非线性分布应力 $\sigma(\bar{x}_0, \bar{y})$ (如图 4(b)所示)引起的。

对于后者, 设想裂纹面上存在一组膜力 $\sigma'_M(\bar{x}_0)$ 和弯矩 $\sigma'_B(\bar{x}_0)$ (如图 4(c)所示), 如果其引起的应力强度因子与 $\sigma(\bar{x}_0, \bar{y})$ 引起的应力强度因子相等, 那么, $\sigma'_M(\bar{x}_0)$ 和 $\sigma'_B(\bar{x}_0)$ 就是裂纹面上非线性分布应力 $\sigma(\bar{x}_0, \bar{y})$ 的等效膜力和等效弯矩。

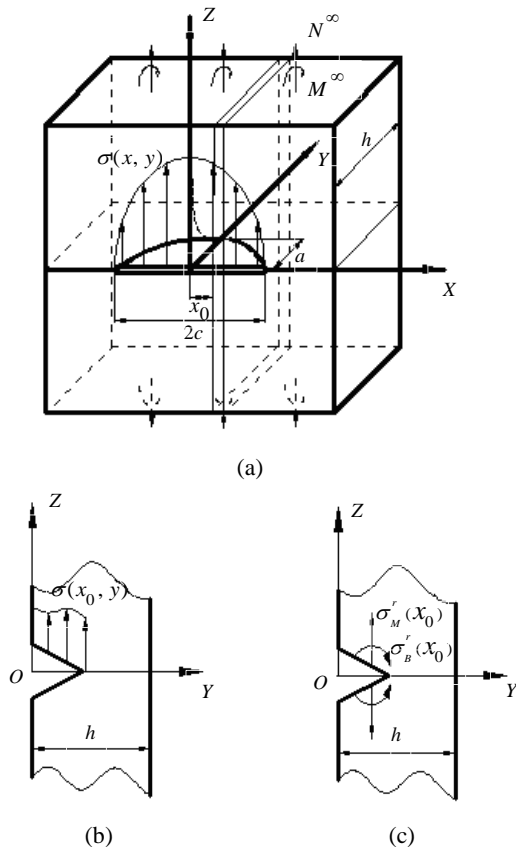


图 4 残余应力平板表面裂纹切片

Fig.4 The slice of surface crack in a residually stressed plate

通过边裂纹权函数^[7]可得到 $\sigma'_M(\bar{x}_0)$ 和 $\sigma'_B(\bar{x}_0)$ 的表达式。

将非线性分布载荷 $\sigma(\bar{x}_0, \bar{y})$ 代入式(1), 将等效膜力和等效弯矩代入式(2), 在保证应力强度因子相等的前提下, 即由式(1)和式(2)相等可得到 $\sigma(\bar{x}_0, \bar{y})$ 的等效膜力和等效弯矩为:

$$\begin{cases} \sigma'_M(\bar{x}_0) \\ \sigma'_B(\bar{x}_0) \end{cases} = \begin{bmatrix} \gamma_{MM} & \gamma_{MB} \\ \gamma_{BM} & \gamma_{BB} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma \int_0^\xi g_r(\xi) g_M(\xi) d\xi \\ \sigma \int_0^\xi g_r(\xi) g_B(\xi) d\xi \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\alpha_{ij} = \int_0^\xi g_i(\xi) g_j(\xi) d\xi$, ($i, j = M, B$), 矩阵 $[\gamma_{ij}] = [\alpha_{ij}]^{-1}$ 。

在 $|\bar{x}| \leq 1$ 范围内, 由于 \bar{x}_0 具有任意性, 那么式(3)可写为:

$$\begin{cases} \sigma'_M(\bar{x}) \\ \sigma'_B(\bar{x}) \end{cases} = \begin{bmatrix} \gamma_{MM} & \gamma_{MB} \\ \gamma_{BM} & \gamma_{BB} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma \int_0^\xi g_r(\xi) g_M(\xi) d\xi \\ \sigma \int_0^\xi g_r(\xi) g_B(\xi) d\xi \end{cases} \quad (4)$$

2.4 平板性能方程

图 3(b)所示的考虑残余应力后穿透裂纹平板性能方程的无量纲形式可根据文献[5]得到:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \frac{\mu_1(\bar{t})}{\bar{t} - \bar{x}} d\bar{t} = \frac{2\pi}{E} [\sigma_M(\bar{x}) - (\sigma'_M(\bar{x}) + \sigma_M^\infty)], \\ \int_{-1}^1 \frac{\mu_2(\bar{t})}{6} \left[\frac{1}{\bar{t} - \bar{x}} - k(\bar{x}, \bar{t}) \right] d\bar{t} = \frac{2\pi c}{3Eh} [\sigma_B(\bar{x}) - (\sigma'_B(\bar{x}) + \sigma_B^\infty)]. \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\bar{t} = t/c$, $x, t \in [-c, c]$, $k(\bar{x}, \bar{t})$ 为已知核函数^[5], $\sigma_M(\bar{x})$ 、 $\sigma_B(\bar{x})$ 、 σ_M^∞ 、 σ_B^∞ 、 $\sigma'_M(\bar{x})$ 和 $\sigma'_B(\bar{x})$ 均如前所指, $\mu_1(\bar{t})$ 、 $\mu_2(\bar{t})$ 为未知位错密度函数, E 为弹性模量。

2.5 线弹簧本构关系

考虑在广义力 $N(x)$ 和 $M(x)$ 作用下如图 3(c)所示用位错密度函数表示的边裂纹板条本构关系已由文献[5]给出:

$$\begin{cases} \sigma_M(\bar{x}) \\ \sigma_B(\bar{x}) \end{cases} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \gamma_{MM} & \gamma_{MB} \\ \gamma_{BM} & \gamma_{BB} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{c}{h} \int_{-1}^1 \mu_1(\bar{t}) H(\bar{x} - \bar{t}) d\bar{t} \\ \frac{1}{6} \int_{-1}^1 \mu_2(\bar{t}) H(\bar{x} - \bar{t}) d\bar{t} \end{cases} \quad (6)$$

其中 $H(\bar{x} - \bar{t})$ 为单位阶跃函数。

2.6 残余应力平板表面裂纹的应力强度因子

将线弹簧本构关系式(4)和式(6)代入平板性能方程式(5), 得到一 Cauchy 型奇异积分方程:

$$\int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{t}-\bar{x}} + k_{11}(\bar{x}, \bar{t}) & k_{12}(\bar{x}, \bar{t}) \\ k_{21}(\bar{x}, \bar{t}) & \frac{3}{\bar{t}-\bar{x}} + 3k(\bar{x}, \bar{t}) + k_{22}(\bar{x}, \bar{t}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_1(\bar{t}) \\ \mu_2(\bar{t}) \\ 6 \end{Bmatrix} d\bar{t} = -\frac{2\pi}{E} \begin{bmatrix} \gamma_{MM} & \gamma_{MB} \\ \frac{c}{h}\gamma_{BM} & \frac{c}{h}\gamma_{BB} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\xi g_r(\xi)g_M(\xi)d\xi \\ \int_0^\xi g_r(\xi)g_B(\xi)d\xi \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \sigma_M^\infty \\ \frac{c}{h}\sigma_B^\infty \end{array} \right\} \quad (7)$$

式中, $k(\bar{x}, \bar{t})$ 及 $k_{ij}(\bar{x}, \bar{t})$, $i, j=1, 2$ 为已知核函数^[4], 其它各量如前所指。

利用 Gauss-Chebyshev 方法^[8]求解此方程。然后, 通过式(2)和式(5)就可确定坐标 \bar{x}_k (\bar{x}_k 为 Chebyshev 多项式零点)的线弹簧内力和裂纹前缘对应点的应力强度因子。为能得到裂纹前缘任意点的应力强度因子, 可对所得对应 \bar{x}_k 的应力强度因子作多项式拟合。

3 数值结果及分析

本文为了与有限元解^[1]进行对比, 令远端拉伸力和弯矩为零且残余应力模型^[9]为:

$$\sigma(\bar{x}, \bar{y}) = \sigma_0 \left(\frac{\bar{y}}{a} \right)^n, \quad n = 0, 1, 2 \quad (8)$$

其中, $\sigma(\bar{x}, \bar{y})$ 沿无量纲坐标 \bar{x} 为均匀分布, $\sigma_0 = \sigma(0, 0)$ 。

在此载荷条件下, 计算了不同 a/h 及 a/c 时的表面裂纹应力强度因子。并对应力强度因子 K_I 无量纲化:

$$f = \frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{\pi a} / Q} \quad (9)$$

其中, Q 为裂纹形状因子, 在 $a/c \leq 1$ 可用如下近似公式^[10]表示:

$$Q = 1 + 1.464(a/c)^{1.65} \quad (10)$$

计算时取泊松比 $\nu = 0.3$, 计算结果及对比情况如图 5—图 7 所示。

图 5—图 7 表示在几种幂函数形式的残余应力作用下, 表面裂纹前缘各点(用椭圆参数角 θ 表示, 见图 1)应力强度因子的变化规律。总的看来, 本文

结果与有限元解^[1]吻合较好。

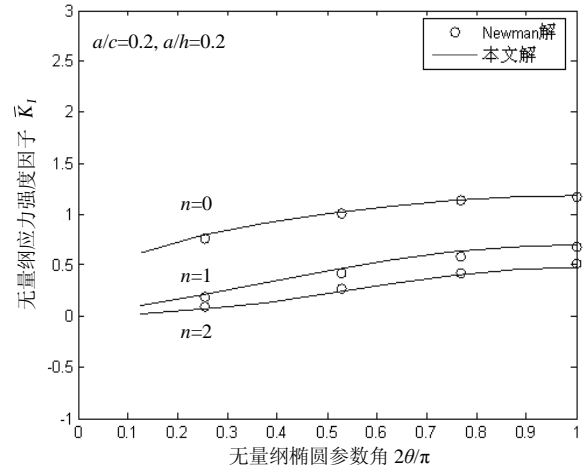


图 5 表面裂纹应力强度因子

Fig.5 The stress intensity factor of surface crack

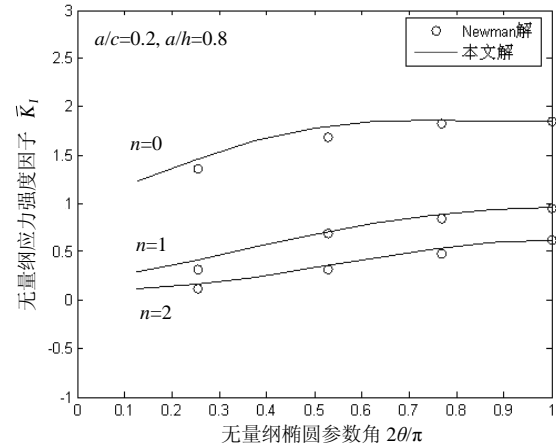


图 6 表面裂纹应力强度因子

Fig.6 The stress intensity factor of surface crack

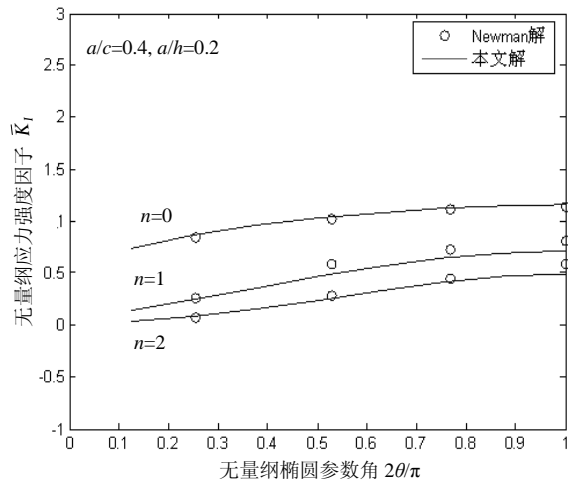


图 7 表面裂纹应力强度因子

Fig.7 The stress intensity factor of surface crack

由图 5 和图 6 可看出: 在 a/c 相同的条件下, 当 a/h 较小时, 本文解与有限元解^[1]吻合较好, 当 a/h 增大时, 相对误差有所增大, 并且在靠近背面一侧的裂纹前缘各点应力强度因子相对误差较

小,而在靠近前表面一侧裂纹前缘各点应力强度因子相差较大。

由图5和图7可看出:在 a/h 相同的条件下,当 a/c 较小时,本文解与有限元解^[1]吻合较好,当 a/c 增大时,相对误差有所增大,并且在靠近背表面一侧的裂纹前缘各点应力强度因子相对误差较大,而在靠近前表面一侧裂纹前缘各点应力强度因子相差较小。

总的来说,本文解与有限元解^[1]吻合较好,作为工程应用已经能够满足要求。当 a/c 增大时,本文解与有限元解^[1]误差增大的原因可能是各线弹簧之间由于裂纹前缘曲率而引起相互作用造成的;当 a/h 增大时,本文解与有限元解^[1]误差增大的原因可能是权函数拟合误差造成的。

4 结 论

(1) 本文计算结果表明:本文所建立的含残余应力平板表面裂纹的线弹簧模型是合理可靠的。

(2) 对于较小的 a/c , a/h 时,本文结果与有限元解^[1]吻合较好;当 a/c , a/h 值增大时,两者误差有所增大。

(3) 本文方法的计算程序简单、编程方便、计算量小,特别适合于工程实际应用。

参考文献:

- [1] Cordes R D, Joseph P F. Surface and internal cracks in a residually stressed plate [J]. *International Journal of Fracture*, 1995, 68: 287—314.
- [2] Rice J R, Levy N J. The part-through surface cracks in an

elastic plate [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1972, 39: 185—194.

- [3] Delale F, Erdogan F. Line spring model for surface crack in Reissner plate [J]. *International Journal of Engineering Science*, 1981, 19: 1331—1340.
- [4] 袁杰红, 唐国金. 椭圆形半露头裂纹的线弹簧模型[J]. *工程力学*, 1999, 16(2): 65—70.
- Yuan Jiehong, Tang Guojin. The line-spring model for elliptic part-through crack [J]. *Engineering Mechanics*, 1999, 16(2): 65—70. (in Chinese)
- [5] 袁杰红, 唐国金. 无限平板内埋裂纹线弹簧模型[J]. *固体力学学报*, 1999, 20(1): 69—75.
- Yuan Jiehong, Tang Guojin. The line-spring model for embedded crack in an infinite plate [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1999, 20(1): 69—75. (in Chinese)
- [6] Fan X J. A combination of the weight function method and line spring model: a surface-cracked cylindrical shell subject to stress gradients [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1995, 32: 3037—3046.
- [7] Wu X R, Carlsson J. Wide-range weight function for single edge crack in a finite width sheet [C]. *Proceedings of 5th International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics* Freiburg, Germany, 1990: 17—28.
- [8] Erdogan F, Gupta G D. On the numerical solution of singular integral equations [J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1979, 37: 239—258.
- [9] Cordes R D, Joseph P F. Surface and internal cracks in a residually stressed plate [J]. *International Journal of Fracture*, 1995, 68: 287—314.
- [10] 袁杰红. 静态和动态断裂分析中的奇异积分方程方法[D]. 长沙: 国防科技大学, 1999.
- Yuan Jiehong. The singular integral equation method for static and dynamic fracture analysis [D]. Changsha: National University of Defence Technology, 1999. (in Chinese)