文章编号：1000-4750(2008)08-0194-06

冲击振动落砂机在 1∶4 强共振点附近的动力学特性

*张艳龙[1]，徐慧东[2]

(1. 兰州交通大学机电工程学院，甘肃，兰州 730070；2. 西南交通大学应用力学与工程系，四川，成都 610031)

摘　要：应用映射的中心流形和范式方法，研究了冲击振动落砂机高维映射在其 Jacobian 矩阵的一对复共轭特征值 ±i 穿越复平面单位圆周情况下的分岔：应用中心流形理论将 Poincaré映射化为二维映射，并得到了 1∶4 强共振下的范式映射，从而讨论了映射在 1∶4 强共振点附近的分岔图重组过程，定性分析了冲击振动落砂机在 1∶4 强共振点及其附近的动力学特性。数值仿真结果也表明：冲击振动落砂机在 1∶4 强共振点附近存在周期运动的 Neimark-Sacker 分岔和一些复杂分岔，如周期 4 轨道的 T_{on} 型和 T_{out} 型相切分岔。

关键词：冲击振动；强共振；中心流形；范式；分岔；混沌

中图分类号：O322；TH113.1　　**文献标识码**：A

DYNAMICAL BEHAVIOR OF THE INERTIAL SHAKER NEAR 1∶4 STRONG RESONANCE POINT

*ZHANG Yan-long[1], XU Hui-dong[2]

(1. School of Mechatronic Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou, Gansu 730070, China;

2. Department of Applied Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China)

Abstract: The local bifurcation of an inertial shaker, concerning one complex conjugate pair of eigenvalues ±i of the Jacobian matrix of the mapping escaping the unit circle simultaneously, is investigated by using the center manifold theorem technique and normal form method of the mapping. A center manifold theorem technique is applied to reduce the Poincaré mapping to a two-dimensional one, and the normal form mapping associated with 1∶4 strong resonance is obtained. Thusly, the changing process of the bifurcation diagrams of the mapping near 1∶4 strong resonance point is discussed. The local dynamical behavior of an inertial shaker near 1∶4 strong resonance point is investigated by using qualitative analysis. The results from numerical simulation also illustrate that Neimark-Sacker bifurcation of periodic-impact motions and some complicated bifurcations, e.g., T_{on} and T_{out} types of tangent bifurcations of period-4 orbits, are found to exist in the inertial shaker near 1∶4 strong resonance point.

Key words: vibro-impact; strong resonance; center manifold; normal form; bifurcation; chaos

冲击振动系统在机械、车辆和核反应堆工程等应用领域中经常遇到，如高速列车的蛇行、汽车的前轮摇摆、机翼和大跨度桥梁的颤振、装于滑动轴承上的大型高速转子的油膜振荡、利用冲击振动落砂机落砂、利用冲击减振器减振等，这些现象中系统的参数变化常会引起系统响应的本质变化，如产

收稿日期：2006-12-29；修改日期：2007-06-01

基金项目：国家自然科学基金项目(10572055，50475109)；甘肃省自然科学基金项目(3ZS062-B25-007，3ZS042-B25-044)

作者简介：*张艳龙(1981－)，男(满族)，河北围场人，讲师，硕士，从事非线性动力学及车辆工程研究(E-mail: zhangyl@mail.lzjtu.cn)；
徐慧东(1978－)，男，山西忻州人，博士生，从事分岔理论及周期解的稳定性研究(E-mail: xhd0931@sina.com).

生分岔现象，甚至导致混沌运动，从而使系统的动态失稳，这种失稳若得不到及时控制将会造成动力学结构的重大破坏，可见研究冲击振动系统的动力学特性具有重要意义。

自 20 世纪 80 年代以来，国内外许多学者开始用现代动力系统观点研究碰撞振子的动力学，而且研究内容也广泛地集中于冲击与碰撞振动系统的分岔与混沌问题，如研究系统的稳定性与分岔[1−4]、奇异性[5−6]、概周期碰撞运动[7]、倍周期分岔[8]、强共振分岔[9−10]、混沌控制[11]、工程应用[12−13]等问题，其中文献[4]研究了冲击振动落砂机的周期运动稳定性、分岔及混沌形成过程，文献[10]研究了一类冲击振动系统在强共振($\lambda_0^4=1$)条件下的亚谐分叉与 Hopf 分叉。本文在文献[4]和文献[10]的基础上应用 Poincaré映射方法、中心流形和范式方法[14]揭示了冲击振动落砂机在 1∶4 强共振条件下及其附近的动力学行为，并通过数值仿真验证了部分结果。

1　力学模型与 Poincaré映射[4]

图 1 是冲击振动落砂机的力学模型，振动机体 M 由刚度为 K 的线性弹簧和阻尼系数为 C 的线性阻尼器联接于支承，X 和 Y 分别表示振动机体和铸件 m 的位移。振动机体 M 在简谐激振力 $F=F_0\sin(\Omega T+\tau)$ 作用下与铸件 m 发生碰撞，碰撞后振动机体与铸件分离，在铸件自由下落或上抛过程中铸件与振动机体再次发生碰撞，如此往复。

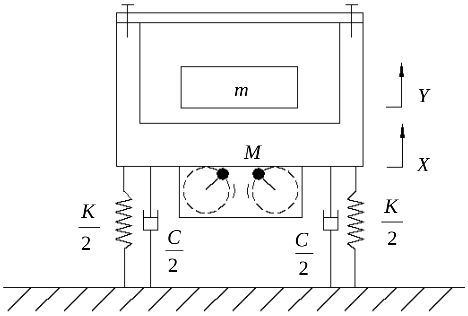


图 1　冲击振动落砂机的力学模型

Fig.1　Schematic of the inertial shaker

相邻两次碰撞间振动机体与铸件的运动方程为：

$$M\ddot{X}+C\dot{X}+KX=F_0\sin(\Omega T+\tau)\,,\quad \ddot{Y}=-g \tag{1}$$

令 $\Omega_0=\sqrt{K/M}$，$\beta=F_0/Mg$，$t=\Omega_0 T$，$g_1=1/\beta$，$x=KX/F_0$，$y=KY/F_0$，$\omega=\Omega/\Omega_0$，$2\zeta=C/\sqrt{KM}$，可将方程(1)无量纲化为：

$$\ddot{x}+2\zeta\dot{x}+x=\sin(\omega t+\tau)\,,\quad \ddot{y}=-g_1 \tag{2}$$

令 $\mu_m=m/M$，$\dot{x}_-$ 和 $\dot{y}_-$ 为振动机体 M 和铸件 m 碰撞前的无量纲瞬时速度，$\dot{x}_+$ 和 $\dot{y}_+$ 为振动机体和铸件碰撞后的无量纲瞬时速度，由碰撞动量守恒定律及碰撞恢复系数 R 的定义得：

$$\dot{x}_-+\mu_m\dot{y}_-=\dot{x}_++\mu_m\dot{y}_+\,,$$
$$\dot{x}_+-\dot{y}_+=-R(\dot{x}_--\dot{y}_-) \tag{3}$$

用 n/p 表示系统的周期运动，n 和 p 分别表示力周期数、质块 m 与质块 M 的碰撞次数。在适当的系统参数下图 1 所示系统能够呈现稳定的周期 $q=1/1$ 运动。令 $\theta=\omega t$，选择截面 $\sigma=\{(x,\dot{x},y,\dot{y},\theta)\in R^4\times S\,,\ x=y\,,\ \dot{x}=\dot{x}_+\,,\ \dot{y}=\dot{y}_+\}$ 建立 $q=1/1$ 周期运动的 Poincaré映射[4]：

$$\boldsymbol{X}'=\tilde{f}(v,\boldsymbol{X}) \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{X}\in R^4$，$v\in R^1$，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*+\Delta\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{X}^*+\Delta\boldsymbol{X}'$，$\boldsymbol{X}^*=(\dot{x}_+,x_0,\dot{y}_+,\tau_0)^{\mathrm{T}}$ 为映射不动点，$\Delta\boldsymbol{X}'=(\Delta\dot{x}'_+,\Delta x',\Delta\dot{y}'_+,\Delta\tau')^{\mathrm{T}}$ 和 $\Delta\boldsymbol{X}=(\Delta\dot{x}_+,\Delta x,\Delta\dot{y}_+,\Delta\tau)^{\mathrm{T}}$ 是周期 q=1/1运动不动点 $\boldsymbol{X}^*$ 的扰动量。

将映射(4)变换为：

$$\Delta\boldsymbol{X}'=\tilde{f}(v,\boldsymbol{X})-\boldsymbol{X}^*\overset{\mathrm{Def}}{=}f(v,\Delta\boldsymbol{X}) \tag{5}$$

映射(5)在周期 q=1/1不动点处的线性化矩阵为：

$$\boldsymbol{D}f(v,\boldsymbol{0})=\partial f(v,\Delta\boldsymbol{X})/\partial\Delta\boldsymbol{X}\,|_{(v,\boldsymbol{0})} \tag{6}$$

通过计算矩阵 $\boldsymbol{D}f(v,\boldsymbol{0})$ 的特征值可以分析图 1 所示系统周期 q=1/1运动的稳定性与局部分岔。

在临界值$v=v_c$的某个邻域内，假设：1)$\boldsymbol{D}f(v,\boldsymbol{0})$ 有一对复共轭特征值 $\lambda_1=\lambda_1(v_c)$，$\lambda_2=\overline{\lambda}_1(v_c)$，且 $|\lambda_{1,2}(v_c)|=1$，其余特征值 $\lambda_i(v_c)$ 满足 $|\lambda_i(v_c)|<1$，$i=3,4$；2) $\dfrac{\mathrm{d}|\lambda_1(v)|}{\mathrm{d}v}\Big|_{v=v_c}>0$。若映射(5)在分岔点处满足条件 1)、条件 2)和$\lambda_{1,2}^m(v_c)\neq 1,\ \ m=1,2,3,4$，此映射可能发生非共振或弱共振情况下的内依马克-沙克分岔；若映射(5)在分岔点满足条件 1)、条件 2)和 $\lambda_{1,2}^m(v_c)=1$ ($m=1$或$2,3,4$)，映射可能发生强共振情况下的内依马克-沙克分岔。下面用中心流形-范式方法分析映射(5)在 $\lambda_{1,2}^4(v_c)=1$ 强共振条件下的动力学特性。

2　中心流形与范式映射

在 v_c 的某个邻域内，令 $\boldsymbol{r}_i$ 表示 $\boldsymbol{D}f(v,\boldsymbol{X}^*)$ 的特

征值 $\lambda_i(v)$ ($i=1,2,3,4$)所对应的特征向量，如果 λ_3 和 λ_4 是一对共轭特征值，则令 $\boldsymbol{P}=(\mathrm{Re}\,r_1,-\mathrm{Im}\,r_1,\mathrm{Re}\,r_3,-\mathrm{Im}\,r_3)$，否则令 $\boldsymbol{P}=(\mathrm{Re}\,r_1,-\mathrm{Im}\,r_1,r_3,r_4)$。令 $\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$，取 $\mu_1=\nu_1-\nu_{1c}$，$\mu_2=\nu_2-\nu_{2c}$，$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}+\boldsymbol{X}^*$，映射(5)可变为：

$$\boldsymbol{Y}'=F(\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{Y}) \tag{7}$$

令 $z_1=y_1+\mathrm{i}y_2$，$z_2=y_1-\mathrm{i}y_2$，$\boldsymbol{z}=(z_1,z_2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{W}=(y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{G}=F_1\boldsymbol{I}+\mathrm{i}F_2\boldsymbol{I}-\lambda_1\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{H}=(F_3,F_4)^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{D}_1W$，$\boldsymbol{D}_1$ 是对应特征值 $\tilde{\lambda}_{3,4}(\mu)$ 的实数矩阵，$\lambda_i=\tilde{\lambda}_i(\mu)=\lambda_i(v_c+\mu)$，$i=1,2,3,4$，$\tilde{\lambda}_{1,2}(0)=\alpha\pm\mathrm{i}\varpi$ (在 1∶4 强共振下 $\tilde{\lambda}_{1,2}(0)=\pm\mathrm{i}$)，$|\tilde{\lambda}_{1,2}(0)|=1$，映射(7)可变为：

$$\boldsymbol{z}'=\lambda_1\boldsymbol{z}+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z},\bar{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{W};\boldsymbol{\mu}),$$
$$\boldsymbol{W}'=\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{W}+\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z},\bar{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{W};\boldsymbol{\mu}) \tag{8}$$

存在一个中心流形 $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{z},\bar{\boldsymbol{z}};\boldsymbol{\mu})$，在此中心流形上映射(8)能够被降阶成一个如下所示的两维映射：

$$\phi(\boldsymbol{z},\bar{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{\mu})=\lambda(\mu)\boldsymbol{z}+g(\boldsymbol{z},\bar{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{\mu}) \tag{9}$$

其中，$g(\boldsymbol{z},\bar{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{\mu})=\sum\limits_{k+l\geq 2}^{3}\dfrac{1}{k!l!}g_{kl}(\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{z}^k\bar{\boldsymbol{z}}^l$。

在 $\|\boldsymbol{\mu}\|$ 比较小时取适当变换消去 1∶4 强共振情况下映射(9)中的所有二次项。令 $h_{kl}=h_{kl}(\boldsymbol{\mu})$，$k=0,1,2,3$，$l=0,1,2,3$，取变换 $w=\zeta+\dfrac{h_{30}}{6}\zeta^3+\dfrac{h_{12}}{2}\zeta\bar{\zeta}^2+\dfrac{h_{21}}{2}\zeta^2\bar{\zeta}+\dfrac{h_{03}}{6}\bar{\zeta}^3$ 消去映射(9)中 $\zeta|\zeta|^2$ 和 $\bar{\zeta}^3$ 以外的所有三次项。最后可得如下范式：

$$\phi_\mu(\zeta,\bar{\zeta})=\lambda(\boldsymbol{\mu})\zeta+C(\boldsymbol{\mu})\zeta^2\bar{\zeta}+D(\boldsymbol{\mu})\bar{\zeta}^3+O(|\zeta|^4) \tag{10}$$

这里 C 和 D 是 $\boldsymbol{\mu}$ 的函数，且有 $C(0)=\dfrac{1+3i}{4}\cdot g_{20}(0)g_{11}(0)+\dfrac{1-i}{2}|g_{11}(0)|^2-\dfrac{1+i}{4}|g_{02}(0)|^2+\dfrac{1}{2}g_{21}(0)$，$D(0)=\dfrac{i-1}{4}g_{11}(0)g_{02}(0)-\dfrac{1+i}{4}g_{02}(0)\bar{g}_{20}(0)+\dfrac{1}{6}g_{03}(0)$。

令 $\omega(0)=0$，C_1 和 D_1 是 $\boldsymbol{\mu}$ 的复变函数，且 $C_1(0)=-4\mathrm{i}C(0)$，$D_1(0)=-4\mathrm{i}D(0)$，则对任意足够小的 $\|\boldsymbol{\mu}\|$，在 1∶4 强共振情况下映射(10)的四次迭代可表示成如下形式：

$$\varGamma_\alpha^4(\zeta)=\varphi_\alpha^1\zeta+O(|\zeta|^4),$$
$$\dot{\zeta}=\omega(\boldsymbol{\mu})\zeta+C_1(\boldsymbol{\mu})\zeta|\zeta|^2+D_1(\boldsymbol{\mu})\bar{\zeta}^3 \tag{11}$$

把 ω 的实部和虚部记为 (β_1,β_2)，$\beta_1(\boldsymbol{\mu})=4\varepsilon(\boldsymbol{\mu})$，$\beta_2(\boldsymbol{\mu})=4\theta(\boldsymbol{\mu})$，$\omega(\boldsymbol{\mu})=\beta_1(\boldsymbol{\mu})+\mathrm{i}\beta_2(\boldsymbol{\mu})$。

假设 $\det(\partial\beta/\partial\mu)\neq 0$，对 $\mu=0$，将式(11)写成

$$\dot{\zeta}=(\beta_1+\mathrm{i}\beta_2)\zeta+c_1(\beta)\zeta|\zeta|^2+d_1(\beta)\bar{\zeta}^3 \tag{12}$$

其中，$c_1(\beta)=C_1(\mu(\beta))$，$d_1(\beta)=D_1(\mu(\beta))$。若 $d_1(0)=D_1(0)\neq 0$，取变换 $\zeta=\gamma(\beta)\eta$，$\gamma(\beta)\in C^1$，且 $\gamma(\beta)=\dfrac{1}{\sqrt{|d_1(\beta)|}}\exp\left(\mathrm{i}\dfrac{\arg d_1(\beta)}{4}\right)$，则式(12)可变为：

$$\dot{\eta}=(\beta_1+\mathrm{i}\beta_2)\eta+A(\beta)\eta|\eta|^2+\bar{\eta}^3 \tag{13}$$

其中，$A(\beta)=c_1(\beta)/|d_1(\beta)|^2$。

用极坐标 $\eta=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 形式，可将式(13)改写成：

$$\dot{\rho}=\beta_1\rho+a(\beta)\rho^3+\rho^3\cos 4\varphi,$$
$$\dot{\varphi}=\beta_2+b(\beta)\rho^2-\rho^2\sin 4\varphi \tag{14}$$

其中，$a(\beta)=\mathrm{Re}\,A(\beta)$，$b(\beta)=\mathrm{Im}\,A(\beta)$。

假设 $\mathrm{Re}\,A\neq 0$ 和 $\mathrm{Im}\,A\neq 0$，对应 $a=\mathrm{Re}\,A<0$，$b=\mathrm{Im}\,A<0$ 所在象限，可将 A-平面用不同分岔曲线划分成 12 个区域，如图 2 所示。这里有些曲线可以理论分析出来或用计算机仿真出来。

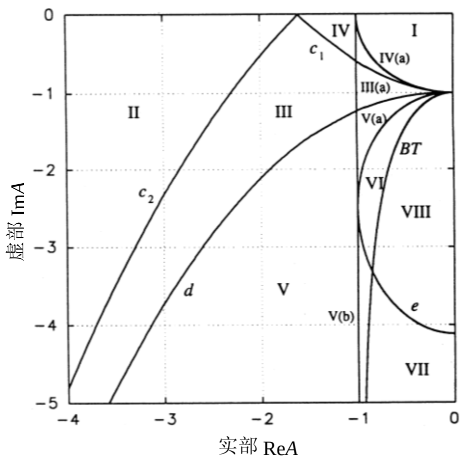


图 2 不同分岔曲线对 A-平面进行区域划分

Fig.2 Division of A-plane into regions with different bifurcation curves

对较小的 $\|\beta\|$，平衡点 $\eta=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 满足 $-\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\rho^2}=A(0)+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\varphi}$，等号左右两边分别表示了通过 $\rho>0$ 参数化的复平面上的一条射线和在 A 点处的单位圆。若 $|A|<1$，则复平面的原点在圆的内部，平衡点 S_k ($k=1,2,3,4$)可以是鞍点。若 $|A|>1$，则复平面的原点在圆的外部，靠近原点的平衡点 S_k 是鞍点，而远离原点的平衡点 E_k 是收敛或发散的。$|A|=1$ 是特例并且应该避免；圆与复平面的虚轴相切 $\mathrm{Re}\,A=-1$ 也是特例。除两种特例外图 2 所示曲线为 (α,A)-空间 BT 曲线的投影 $|b|=\dfrac{1+a_2}{\sqrt{1-a^2}}$，

$a = \mathrm{Re}A$，$b = \mathrm{Im}A$。在这条曲线以上平衡点 E_k 稳定，而在这条曲线以下为不退化的 Hopf 分岔。在 (α, A)-空间，还可能同时存在稳定和不稳定的相互磕碰的大极限环，或存在平方异宿轨道，或存在立方异宿轨道(在 A-平面中这三种情况的相应的边界分别用 e，$c_{1,2}$ 和 d 标出)。具体有以下分岔线：

H_0-平衡点 E_0 的 Hopf 分岔：当 $\alpha = -\pi/2$ 时产生一个稳定的极限环；当 $\alpha = \pi/2$ 时极限环消失。

T-平衡点的相切分岔：8 个平衡点 E_k 和 S_k ($k = 1, 2, 3, 4$)存在(或消失)，若存在，则可能在大极限环的内部、环上、外部，用 T_{in}、T_{on}、T_{out} 表示。

H_1-平衡点 E_k ($k = 1,2,3,4$)的 Hopf 分岔：从平衡点 E_k 分岔出 4 个小极限环。

L-小的同宿环分岔：小的同宿环经 Hopf 分岔产生，经主要鞍点 S_k 的同宿轨道消失。

C_s-平方异宿环：产生稳定的极限环分岔。

C_c-立方异宿环：形成一个稳定的或者不稳定的大极限环，分别用 C_c^- 和 C_c^+ 表示。

F-大极限环的开折分岔：两个大极限环，在环外经历稳定、磕碰和消失。

图 3 给出了最简单区域 I 中相位变化序列。图 4 描述了最复杂区域 VIII 中相图转化过程。

A-平面各区域系统分岔图重组过程如下(数字与图 3 和图 4 中相图下面的数字相对应)：

I: $1 \xrightarrow{H_0} 2 \xrightarrow{C_s} 3(3') \xrightarrow{C_s} 2' \xrightarrow{H_0} 1'$；

II: $4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{on}} 10 \xrightarrow{T_{on}} 5 \xrightarrow{H_0} 4'$；

III: $4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{on}} 10 \xrightarrow{C_s} 11 \xrightarrow{T_{out}} 5 \xrightarrow{H_0} 4'$；

III(a): $4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{on}} 10 \xrightarrow{C_s} 11 \xrightarrow{H_0} 12 \xrightarrow{T} 4'$；

IV: $4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{out}} 11 \xrightarrow{C_s} 10 \xrightarrow{C_s} 11 \xrightarrow{T_{out}} 5 \xrightarrow{H_0} 4'$;

IV(a): $4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{out}} 11 \xrightarrow{C_s} 10 \xrightarrow{C_s} 11 \xrightarrow{H_0} 12 \xrightarrow{T} 4'$；

V: $4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{in}} 8 \xrightarrow{C_c^-} 10 \xrightarrow{C_s} 11 \xrightarrow{T_{out}} 5 \xrightarrow{H_0} 4'$；

V(a,b): $4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{in}} 8 \xrightarrow{C_c^-} 10 \xrightarrow{C_s} 11 \xrightarrow{H_0} 12 \xrightarrow{T} 4'$；

VI: $4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{in}} 8 \xrightarrow{C_c^+} 9 \xrightarrow{F} 10 \xrightarrow{C_s} 11 \xrightarrow{H_0} 12 \xrightarrow{T} 4'$；

VII: $4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{in}} 6 \xrightarrow{H_1} 7 \xrightarrow{L} 8 \xrightarrow{C_c^-} 10 \xrightarrow{C_s} 11 \xrightarrow{H_0} 12 \xrightarrow{T} 4'$；

VIII: $4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{in}} 6 \xrightarrow{H_1} 7 \xrightarrow{L} 8 \xrightarrow{C_c^+} 9 \xrightarrow{F} 10 \xrightarrow{C_s} 11 \xrightarrow{H_0} 12 \xrightarrow{T} 4'$。

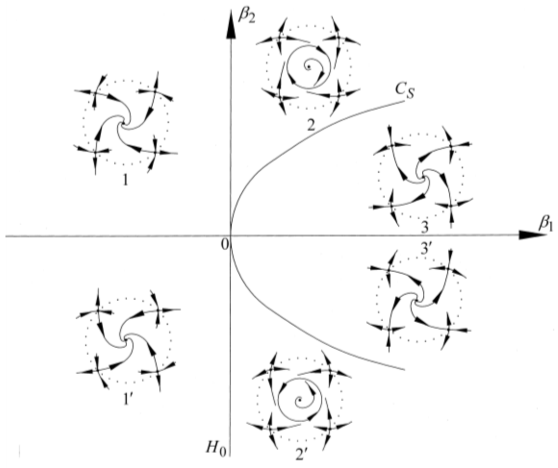


图 3　区域 I 的分岔过程

Fig.3　Bifurcation process in region I

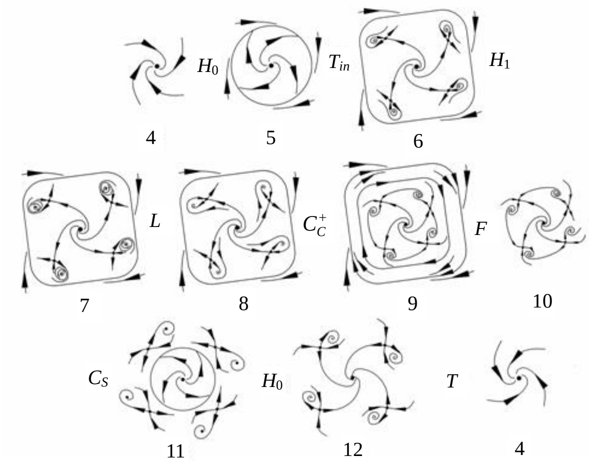


图 4　区域 VIII 的分岔过程

Fig.4　The bifurcation process in region VIII

比较约化系统式(11)和范式映射(10)可知约化系统的平衡点 E_0 对应了映射的一般不动点；系统 4 个耦合平衡点对应了初始映射的周期 4 环；平衡点 E_k 的相切分岔和 Hopf 分岔对应映射主要不动点的相切分岔和 Neimark-Sacker 分岔。一对复共轭特征值从 1∶4 强共振点直接穿越单位圆可能发生亚谐分岔[10]。根据中心流形理论在 1∶4 强共振分岔点附近映射的局部行为等价于 ε 接近 $\boldsymbol{\mu} = (0, 0)^{\mathrm{T}}$ 时范式映射的局部行为。故分析范式映射的局部分岔可揭示强共振下系统的动力学行为。

3　数值分析

本节通过数值仿真分析冲击振动落砂机在 1∶4 强共振点及其附近的动力学行为。选取落砂机

的一组参数：$\beta=1.5$，$\zeta=0.1$ 和 $R=0.6$。取激励频率 ω 和质量比 μ_m 作为分岔参数，即 $\boldsymbol{v}=(\omega,\mu_m)^{\mathrm{T}}$。当 $\boldsymbol{v}=(0.9,0.45)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{X}^*)$的所有特征值都位于复平面的单位圆内，逐渐减小 ω 和 μ_m，当 $\boldsymbol{v}$ 递减穿越 $\boldsymbol{v}_c=(0.8882571,0.4311895)^{\mathrm{T}}$ 时，$\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{X}^*)$ 有一对复共轭特征值 $\lambda_{1,2}(\omega)$ 从 $\pm\mathrm{i}$ 处穿越单位圆周，其余特征值仍在单位圆周内。$\boldsymbol{v}_c$ 是 1∶4 强共振的分岔值，且 $\lambda_{1,2}(\boldsymbol{v}_c)=-0.00000011\pm1.00000092\mathrm{i}$，$\lambda_{1,2}^4(\boldsymbol{v}_c)=1$；$\lambda_{3,4}(\boldsymbol{v}_c)=0.0253442\pm0.29467783\mathrm{i}$。

首先选质量比 $\mu_m=\mu_{mc}=0.4311895$，改变激励频率 ω，数值仿真结果表明当 $\omega\in[0.8882571,0.9]$ 时冲击振动落砂机具有稳定的周期 $q=1/1$ 运动。当 ω 递减穿越 $\omega_c=0.8882571$ 后，系统周期 $q=1/1$ 运动发生 1∶4 强共振条件下的亚谐分岔，产生周期 $q=4/4$ 不动点，如图 5(a)所示。随 ω 的减小，周期 $q=4/4$ 点发生倍化分岔，产生稳定的周期 $q=8/8$ 运动，如图 5(b)所示。ω 继续减小，周期 $q=8/8$ 不动点变成 8 个焦点，如图 5(c)所示。ω 继续减小，不稳定的周期 $q=8/8$ 点发生内依马克-沙克分岔，形成周期 $q=8/8$ 概周期冲击运动，在投影 Poincaré截面上 8 个吸引不变圈表示了概周期吸引子($T_{8/8}^1$ 环)，如图 5(d)所示。ω 进一步减小，吸引不变圈环面倍化形成 $2T_{8/8}^1$ 环，如图 5(e)所示。最后系统经环面倍化嵌入混沌，如图 5(f)所示。

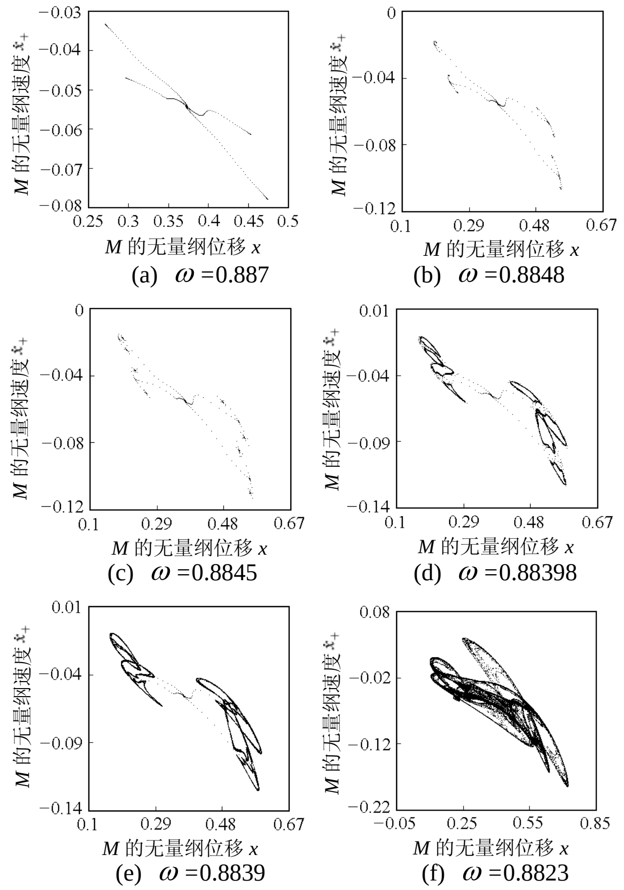
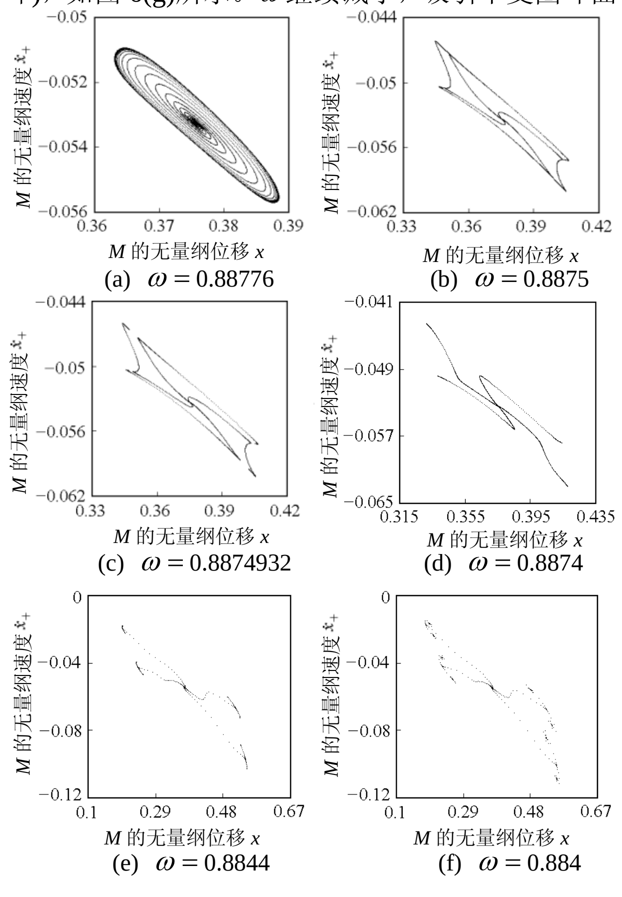
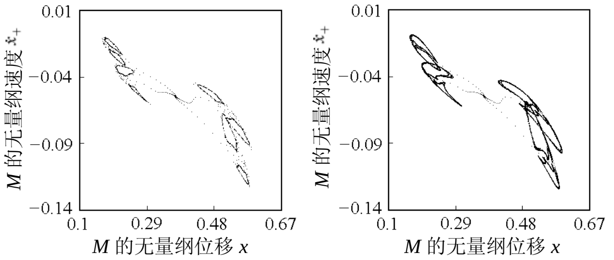


图 5 Poincaré映射投影图($\mu_m=\mu_{mc}=0.4311895$)

Fig.5 Projected Poincaré sections ($\mu_m=\mu_{mc}=0.4311895$)

取 $\mu_m=\mu_{mc}-\Delta\mu_m=0.43$，在 1∶4 强共振分岔点附近，数值仿真表明当 $\omega\in[0.88781507,0.9]$ 时冲击振动落砂机具有稳定的周期 $q=1/1$ 运动。当 ω 递减穿越 $\omega_{c1}=0.88781507$ 后，系统周期 $q=1/1$ 运动发生内依马克-沙克分岔，在投影 Poincaré截面上一个吸引不变圈表示了周期 $q=1/1$ 点的概周期吸引子，如图 6(a)所示。随 ω 的减小，这个吸引不变圈逐渐变得不光滑，如图 6(b)所示。ω 继续减小，周期 $q=1/1$ 不动点发生 T_{on} 型相切分岔，概周期吸引子转变成周期 $q=4/4$ 不动点，如图 6(c)所示。ω 继续减小，周期 $q=4/4$ 不动点的值发生变化，如图 6(d)所示。ω 继续减小，周期 $q=4/4$ 点发生倍化分岔，产生稳定的周期 $q=8/8$ 运动，如图 6(e)所示。ω 继续减小，周期 $q=8/8$ 不动点变成 8 个焦点，如图 6(f)所示。ω 继续减小，不稳定的周期 $q=8/8$ 点发生内依马克-沙克分岔，在投影 Poincaré截面上 8 个吸引不变圈表示了概周期吸引子($T_{8/8}^1$ 环)，如图 6(g)所示。ω 继续减小，吸引不变圈环面





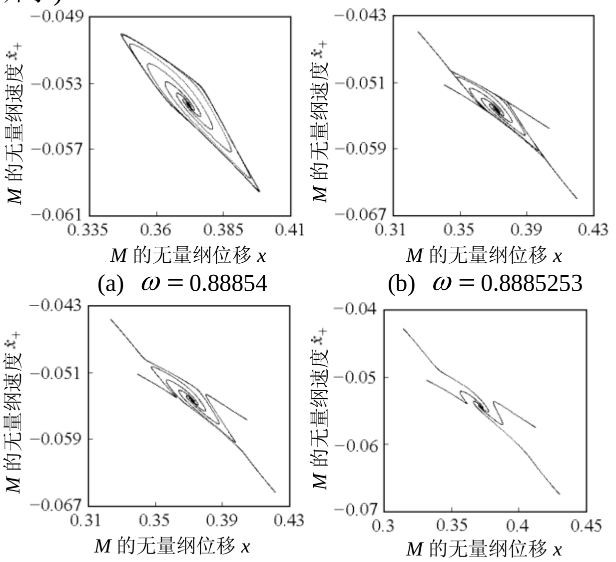
(g) $\omega = 0.8839$　(h) $\omega = 0.8834$

图 6　投影 Poincaré映射图($\mu_m = \mu_{mc} - \Delta\mu_m = 0.43$)

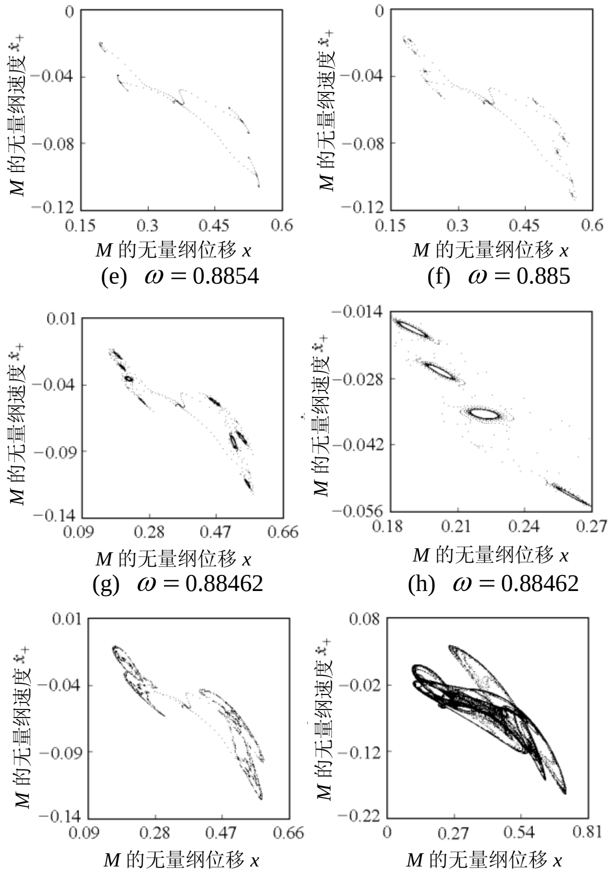
Fig.6　Projected Poincaré sections($\mu_m = \mu_{mc} - \Delta\mu_m = 0.43$)

倍化形成 $2T^1_{8/8}$ 环，如图 6(h)所示。最终系统嵌入混沌，过程类似图 5(f)。

取 $\mu_m = \mu_{mc} + \Delta\mu_m = 0.432379$，在 1∶4 强共振分岔点附近，数值仿真表明当 $\omega \in [0.88870001, 0.9]$ 时冲击振动落砂机具有稳定的周期 $q = 1/1$ 运动。当 ω 递减穿越 $\omega_{c2} = 0.88870001$ 后，系统周期 $q = 1/1$ 运动失稳发生内依马克-沙克分岔，在投影 Poincaré截面上一个吸引不变圈表示了周期 $q = 1/1$ 点的概周期吸引子，如图 7(a)所示。随 ω 的减小，周期 $q = 1/1$ 不动点发生 T_{out} 型相切分岔，形成周期 $q = 4/4$ 不动点，如图 7(b)所示。ω 继续减小，周期 $q = 4/4$ 不动点的值发生变化，如图 7(c)和图 7(d)所示。ω 继续减小，周期 $q = 4/4$ 点发生倍化分岔，产生稳定的周期 $q = 8/8$ 运动，如图 7(e)所示。ω 继续减小，周期 $q = 8/8$ 不动点变成 8 个焦点，如图 7(f)所示。ω 继续减小，不稳定的周期 $q = 8/8$ 点发生内依马克-沙克分岔，在投影 Poincaré截面上 8 个吸引不变圈表示概周期吸引子，如图 7(g)所示(图 7(h)是图 7(g)的局部放大图)。ω 继续减小，吸引不变圈经锁相(如图 7(i)所示)嵌入混沌(如图 7(j)所示)。



(a) $\omega = 0.88854$　(b) $\omega = 0.8885253$　(c) $\omega = 0.88851$　(d) $\omega = 0.8884$



(e) $\omega = 0.8854$　(f) $\omega = 0.885$　(g) $\omega = 0.88462$　(h) $\omega = 0.88462$　(i) $\omega = 0.88443$　(j) $\omega = 0.8828$

图 7　投影 Poincaré映射图($\mu_m = \mu_{mc} + \Delta\mu_m = 0.432379$)

Fig.7　Projected Poincaré sections($\mu_m = \mu_{mc} = 0.432379$)

数值仿真结果表明冲击振动落砂机在 1∶4 强共振点附近存在周期运动的 Neimark-Sacker 分岔和一些复杂分岔，如周期 4 轨道的 T_{on} 型和 T_{out} 型相切分岔，验证了部分理论结果。

4　结论

本文应用中心流形理论将冲击振动落砂机周期运动的 Poincaré映射化为二维映射，得到了 1∶4 强共振下的范式映射，定性地得出了冲击振动落砂机在 1∶4 强共振点及其附近的动力学特性：(1) 在 1∶4 强共振点可以发生亚谐分岔；(2) 在 1∶4 强共振点附近可能存在 12 个区域共 11 种分岔相图转化过程，其中通常存在周期运动的 Neimark-Sacker 分岔和一些复杂分岔，如周期 4 轨道的 T_{on} 型和 T_{out} 型相切分岔。此外本文还通过数值仿真给出了系统经这些复杂分岔通向混沌的演化过程，验证了部分理论结果。

(参考文献转第 211 页)