

文章编号: 1000-4750(2011)07-0006-07

四边形八节点共旋法平面单元的几何非线性分析

*邓继华^{1,2}, 邵旭东¹, 邓潇潇³

(1. 湖南大学土木工程学院, 湖南, 长沙 410081; 2. 长沙理工大学土木与建筑工程学院, 湖南, 长沙 410076;

3. 湖南省第三测绘院, 湖南, 长沙 410072)

摘 要: 不同于大部分共旋法研究中所选取的局部坐标系原点及采用的几何一致性原则, 该文通过改变局部坐标系原点位置, 基于场一致性原则, 采用共旋坐标法导出了四边形八节点平面单元在大转动、小应变条件下的几何非线性单元切线刚度矩阵, 该单元刚度矩阵虽然不对称, 但计算量能明显减少, 这在非线性计算中对于减小由于计算机位数限制带来的累积舍入误差和提高迭代的收敛性都有重要意义, 利用这一非对称的单元切线刚度矩阵由 Newton-Raphson 迭代法编制了一个 FORTRAN 程序, 利用程序对承受端部集中荷载和全梁均布荷载的悬臂梁进行了计算, 结果与参考解吻合良好; 对拱顶承受竖向集中载荷的坦拱进行了全过程分析, 计算结果表明单元具有很好的精度和稳定性, 具有一定的实用价值, 值得推荐。

关键词: 四边形八节点平面单元; 共旋坐标法; 非对称单元切线刚度矩阵; 场一致性; 几何非线性

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A

GEOMETRICALLY NONLINEAR ANALYSIS USING A QUADRILATERAL 8-NODE CO-ROTATIONAL PLANE ELEMENT

*DENG Ji-hua^{1,2}, SHAO Xu-dong¹, DENG Xiao-xiao³

(1. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China;

2. College of Bridge and structural Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha, Hunan 410076, China;

3. Hunan Third Institute of Survey and Mapping, Changsha, Hunan 410007, China)

Abstract: A new geometric nonlinear element tangent stiffness matrix for the quadrilateral 8-node plane element under a large rotation with small strain is presented by changing the origin of the coordinate system and adopting a field consistency principle, which is different from other existing co-rotational approach adopting the origin of a local coordinate system and a geometric consistency principle. The stiffness matrix is asymmetric. However, it requires less computation and positively meaningful in reducing the accumulated round-off errors and increasing the convergence of iterations. A Fortran-based nonlinear finite element iteration procedure is established by the Newton-Raphson technique. Two examples including a cantilever beam with a concentrated load and a distributed load and a shallow arch under a concentrated load at arch crown are solved to verify the reliability and computational efficiency of the proposed element formulation.

Key words: quadrilateral 8-node plane element; co-rotational; asymmetric element tangent stiffness matrix; field consistency; geometric nonlinear

收稿日期: 2009-12-02; 修改日期: 2010-10-26

基金项目: 长沙理工大学桥梁工程湖南省普通高等学校重点实验室开放基金项目(10KA11)

作者简介: *邓继华(1975—), 男, 湖南冷水江人, 副教授, 硕士, 从事桥梁结构分析与设计研究(E-mail: jihudeng@sina.com);

邵旭东(1961—), 男, 浙江富阳人, 教授, 博士, 博导, 从事大跨新型桥梁结构的理论研究(E-mail: shaofd@hnu.cn);

邓潇潇(1984—), 男, 湖南冷水江人, 助工, 硕士, 从事工程测绘研究(E-mail: dxwiki@yahoo.com.cn).

按照对物质运动描述的不同, 目前已有的结构几何非线性分析方法共分成总体拉格朗日法、修正拉格朗日法及共旋坐标法三种方法^[1]; 在这三种方法中, 共旋坐标法是出现得最晚也是应用最少的一种; 按照文献[2-6]的介绍, 共旋坐标法的主要步骤为: 1) 在单元上定义一个参考坐标系, 该参考坐标系随着整个单元的刚体运动而发生平移和转动, 但不发生变形; 2) 计算在参考坐标系下的各节点变量值, 在计算局部坐标系下的单元内力及切线刚度矩阵时就排除了整个单元刚体运动的影响; 3) 由于整个单元发生大的刚体运动而导致的几何非线性影响就在转换矩阵中予以考虑, 转换矩阵就是将局部与整体坐标系下的单元内力及切线刚度矩阵联系起来; 由于 C-R 坐标系精确扣除单元刚体运动和基于整体平衡条件而不是增量平衡条件计算单元抗力, 这使得能够取消增量步内为小转动的限制免误差累积, 具有极高的精度和效率; 由于共旋坐标法的这些优点, 除平面或空间梁单元以外, 在板、壳的非线性问题中也有研究应用, 文献[7-8]都是将参考坐标系原点建立在壳单元中面的中心, 在中面及其法向方向建立坐标系, 先得到转换矩阵, 再分别得到四节点和八节点壳单元的切线刚度矩阵, 对层压复合材料结构进行了弯曲、自由振动、压屈等线性和非线性分析; 文献[9]得到了一个曲线四边形九节点壳单元的共旋法列式, 具体作法是将参考坐标系原点建立在两对角线的交点上, x 轴与 y 轴分别取两对角线形成的角度的 $1/2$ 分角线, z 轴正交于 x 轴与 y 轴, 推导得到转换矩阵后再得到一个对称的单元切线刚度矩阵, 算例表明该单元具有很好的精度和可靠性; 文献[10-11]也都是将参考坐标系原点建立在单元的中心或形心, 文献[12]利用共旋法对板单元进行了研究, 得到了对称的单元切线刚度矩阵。以上研究除了局部坐标系的选取外还有一个特点, 即用描述整体位移增量 $\delta \mathbf{P}$ 与局部位移增量 $\delta \mathbf{P}_i^l$ 之间的转换矩阵来作为单元整体坐标节点力向量 \mathbf{q} 与局部坐标节点力向量 \mathbf{q}_i^l 的转换矩阵, 也就是所谓的几何一致性原则。鉴于此, 本文将参考坐标系原点建立在角节点, 以作为坐标系原点的角节点到相邻角节点的方向为 X 轴, 基于共旋坐标法的场一致性原则, 导出了四边形八节点平面单元在大转动、小应变下的切线刚度矩阵, 发现单元切线刚度矩阵是不对称的, 但算例表明本文列式不仅完全正确, 相对于按几何一致性原则得到的对称单

元切线刚度矩阵, 本文的单刚计算量能明显减少, 较适合计算量很大的非线性问题研究。

1 共旋坐标法非线性有限元列式

如图 1 所示四边形八节点平面单元, 设单元的节点分别为 $1, 2, \dots, 8$, 结构的整体坐标系设为 Oxy , 单元的局部坐标系为 OXY , 该坐标系统是随单元变形而转动的, 它始终以节点 1 为原点, 以节点 1~节点 3 的方向为 X 轴, 由 X 轴逆时针转 90° 为 Y 轴, 设变形前单元局部坐标 X 轴与整体坐标 x 轴的夹角为 β^0 , 变形后夹角为 β , 则可得变形后局部坐标系转动的角度 θ 为:

$$\theta = \beta - \beta^0 \quad (1)$$

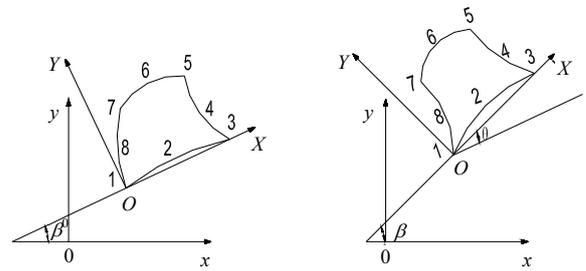


图 1 共旋坐标法四边形八节点平面单元
Fig.1 Quadrilateral 8-node plane element of co-rotational procedure

设单元变形前节点在局部坐标系里的坐标为 $(X_j^0, Y_j^0), j=1, 2, \dots, 8$, 而在整体坐标系里的坐标设为 $(x_j^0, y_j^0), j=1, 2, \dots, 8$, 变形后单元节点在整体坐标系里的坐标设为 $(x_j, y_j), j=1, 2, \dots, 8$, 单元在整体坐标系中各节点的位移为 $(u_j, v_j), j=1, 2, \dots, 8$, 在局部坐标系 OXY 中各节点的相对位移为 $(u_j^l, v_j^l), j=1, 2, \dots, 8$, 则各节点在局部坐标系 OXY 中的坐标应为 $(X_j^0 + u_j^l, Y_j^0 + v_j^l), j=1, 2, \dots, 8$ 。且有:

$$(x_j = x_j^0 + u_j, y_j = y_j^0 + v_j), j=1, 2, \dots, 8 \quad (2)$$

由两坐标系统的几何关系很容易得到变形前单元局部坐标与整体坐标的关系为:

$$\begin{Bmatrix} X_j^0 \\ Y_j^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta^0 & \sin \beta^0 \\ -\sin \beta^0 & \cos \beta^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j^0 - x_1^0 \\ y_j^0 - y_1^0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

变形后单元局部坐标和整体位移的关系为:

$$\begin{Bmatrix} X_j^0 \\ Y_j^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_j^l \\ v_j^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j - x_1 \\ y_j - y_1 \end{Bmatrix}, \quad j=1, 2, \dots, 8 \quad (4)$$

且:

$$\tan \beta^0 = \frac{y_3^0 - y_1^0}{x_3^0 - x_1^0} \quad (5)$$

$$\tan \beta = \frac{y_3^0 - y_1^0 + v_3 - v_1}{x_3^0 - x_1^0 + u_3 - u_1} \quad (6)$$

注意到:

$$\begin{aligned} \delta \cos \beta &= -\sin(\beta \delta \beta) \\ \delta \sin \beta &= \cos(\beta \delta \beta) \end{aligned} \quad (7)$$

并令:

$$s = \sin \beta, \quad c = \cos \beta \quad (8)$$

$$V = y_3^0 - y_1^0 + v_3 - v_1 \quad (9)$$

$$U = x_3^0 - x_1^0 + u_3 - u_1 \quad (10)$$

$$l = \frac{\sqrt{(x_3^0 - x_1^0 + u_3 - u_1)^2 + (y_3^0 - y_1^0 + v_3 - v_1)^2}}{\sqrt{U^2 + V^2}} \quad (11)$$

容易导出:

$$\tan \beta = \frac{V}{U} \quad (12)$$

$$\delta \beta = \frac{1}{l} A_2 \delta \mathbf{P} \quad (13)$$

$$\delta c = -s \delta \beta = -\frac{s}{l} A_2 \delta \mathbf{P} \quad (14)$$

$$\delta s = c \delta \beta = \frac{c}{l} A_2 \delta \mathbf{P} \quad (15)$$

其中:

$$A_2 = (s \ -c \ 0 \ 0 \ -s \ c \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (16)$$

$$\delta \mathbf{P} = (\delta u_1 \ \delta v_1 \ \delta u_2 \ \delta v_2 \ \delta u_3 \ \delta v_3 \ \delta u_4 \ \delta v_4 \ \delta u_5 \ \delta v_5 \ \delta u_6 \ \delta v_6 \ \delta u_7 \ \delta v_7 \ \delta u_8 \ \delta v_8)^T \quad (17)$$

$\mathbf{T} =$

$$\begin{bmatrix} -c & -s & c & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & -c & -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -s & 0 & 0 & c & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & c & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & s & 0 & 0 \\ s & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{l}$$

对式(4)两边微分,并注意到 X_j^0 、 Y_j^0 为常数,可得:

$$\begin{cases} \delta u_j^l \\ \delta v_j^l \end{cases} = \begin{bmatrix} -s & c \\ -c & -s \end{bmatrix} \begin{cases} x_j - x_1 \\ y_j - y_1 \end{cases} \delta \beta + \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{cases} \delta x_j - \delta x_1 \\ \delta y_j - \delta y_1 \end{cases}, \quad j=1,2,\dots,8 \quad (18)$$

在局部坐标系 OXY 中,用 u_i^l 、 v_i^l ($i=1,2,\dots,8$)

分别代表节点 i 沿局部坐标 X 方向、 Y 方向的位移,注意到节点 1 和节点 3 恒有位移 $u_1^l = v_1^l = v_3^l = 0$,则单元在局部坐标系下的节点位移向量 \mathbf{P}_l 可设为:

$$\mathbf{P}_l = (u_2^l \ v_2^l \ u_3^l \ u_4^l \ v_4^l \ u_5^l \ v_5^l \ u_6^l \ v_6^l \ u_7^l \ v_7^l \ u_8^l \ v_8^l)^T \quad (19)$$

用 F_i^x 、 F_i^y ($i=1,2,\dots,8$) 分别代表节点 i 沿局部坐标 X 方向、 Y 方向的节点力,则在该局部坐标系中单元的节点力向量 \mathbf{q}_l 可设为:

$$\mathbf{q}_l = (F_1^x \ F_1^y \ F_2^x \ F_2^y \ F_3^x \ F_3^y \ F_4^x \ F_4^y \ F_5^x \ F_5^y \ F_6^x \ F_6^y \ F_7^x \ F_7^y \ F_8^x \ F_8^y) \quad (20)$$

令

$$\begin{cases} a_j \\ b_j \end{cases} = \begin{bmatrix} -s & c \\ -c & -s \end{bmatrix} \begin{cases} x_j - x_1 \\ y_j - y_1 \end{cases}, \quad j=2,3,\dots,8 \quad (21)$$

将式(21)和式(2)代入式(18),并注意 $a_3=0$, $b_3=-l$ 可得:

$$\delta \mathbf{P}_l = \mathbf{T} \delta \mathbf{P} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} a_2 s & -a_2 c & 0 & 0 & -a_2 s & a_2 c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 s & -b_2 c & 0 & 0 & -b_2 s & b_2 c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 s & -a_4 c & 0 & 0 & -a_4 s & a_4 c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 s & -b_4 c & 0 & 0 & -b_4 s & b_4 c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 s & -a_5 c & 0 & 0 & -a_5 s & a_5 c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_5 s & -b_5 c & 0 & 0 & -b_5 s & b_5 c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_6 s & -a_6 c & 0 & 0 & -a_6 s & a_6 c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_6 s & -b_6 c & 0 & 0 & -b_6 s & b_6 c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_7 s & -a_7 c & 0 & 0 & -a_7 s & a_7 c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_7 s & -b_7 c & 0 & 0 & -b_7 s & b_7 c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_8 s & -a_8 c & 0 & 0 & -a_8 s & a_8 c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_8 s & -b_8 c & 0 & 0 & -b_8 s & b_8 c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

设四边形八节点单元在整体坐标系的节点力向量为 $\mathbf{q} = (f_1^x \ f_1^y \ f_2^x \ f_2^y \ f_3^x \ f_3^y \ f_4^x \ f_4^y \ f_5^x \ f_5^y$

$f_6^x \ f_6^y \ f_7^x \ f_7^y \ f_8^x \ f_8^y)^T$,为导出整体坐标节点力向量 \mathbf{q} 与局部坐标节点力向量 \mathbf{q}_l 的关系,不同于以

往研究所采用的所谓几何一致性原则, 本文采用所谓场一致性原则列式, 即单元的变形在消去刚体位移后在局部坐标系里满足全部的线性弹性力学关系, 因此单元整体坐标节点力向量 \mathbf{q} 与局部坐标节点力向量 \mathbf{q}_l 的关系可通过不考虑单元局部变形的静力学关系导出为:

$$\mathbf{q} = \mathbf{t}^T \mathbf{q}_l \quad (24)$$

$$\mathbf{t} = \text{diag}(\omega \ \omega \ \omega \ \omega \ \omega \ \omega \ \omega \ \omega) \quad (25)$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (26)$$

由共旋法的基本假设, 在局部坐标系里单元的变形被认为是小应变变形, 于是在局部坐标系中对单元采用弹性理论的标准有限元列式可得单元的弹性刚度矩阵 \mathbf{k}_l^e (即常规的有限元法中的 \mathbf{k}^e), 很明显该矩阵与单元的变形无关, 它表达了在局部坐标系中单元节点力增量 δF_i^x 、 δF_i^y ($i=1,2,\dots,8$) 与节点位移增量 δu_i^l 、 δv_i^l ($i=1,2,\dots,8$) 之间的关系, 由于 $u_1^l = v_1^l = v_3^l = 0$, 将 \mathbf{k}_l^e 中的第 1 列、第 2 列、第 6 列去掉形成新矩阵 \mathbf{K}_l^e , 便有:

$$\delta \mathbf{q}_l = \mathbf{K}_l^e \delta \mathbf{P}_l \quad (27)$$

将式(24)两边微分, 并注意到式(27)和式(22)可得:

$$\delta \mathbf{q} = \delta \mathbf{t}^T \mathbf{q}_l + \mathbf{t}^T \mathbf{K}_l^e \mathbf{T} \delta \mathbf{P} \quad (28)$$

为了求得 $\delta \mathbf{t}^T \mathbf{q}_l$, 可将其展开写成:

$$\delta \mathbf{t}^T \mathbf{q}_l = \begin{Bmatrix} \delta c F_1^x - \delta s F_1^y \\ \delta s F_1^x + \delta c F_1^y \\ \delta c F_2^x - \delta s F_2^y \\ \delta s F_2^x + \delta c F_2^y \\ \delta c F_3^x - \delta s F_3^y \\ \delta s F_3^x + \delta c F_3^y \\ \delta c F_4^x - \delta s F_4^y \\ \delta s F_4^x + \delta c F_4^y \\ \delta c F_5^x - \delta s F_5^y \\ \delta s F_5^x + \delta c F_5^y \\ \delta c F_6^x - \delta s F_6^y \\ \delta s F_6^x + \delta c F_6^y \\ \delta c F_7^x - \delta s F_7^y \\ \delta s F_7^x + \delta c F_7^y \\ \delta c F_8^x - \delta s F_8^y \\ \delta s F_8^x + \delta c F_8^y \end{Bmatrix} \quad (29)$$

将式(14)和式(15)代入到式(27), 便可改写式(29)为:

$$\delta \mathbf{t}^T \mathbf{q}_l = \mathbf{K}_n \delta \mathbf{P} \quad (30)$$

式中:

$$\mathbf{K}_n = \begin{bmatrix} -\left(\frac{s}{l} F_1^x + \frac{c}{l} F_1^y\right) \mathbf{A}_2 \\ \left(\frac{c}{l} F_1^x - \frac{s}{l} F_1^y\right) \mathbf{A}_2 \\ -\left(\frac{s}{l} F_2^x + \frac{c}{l} F_2^y\right) \mathbf{A}_2 \\ \left(\frac{c}{l} F_2^x - \frac{s}{l} F_2^y\right) \mathbf{A}_2 \\ -\left(\frac{s}{l} F_3^x + \frac{c}{l} F_3^y\right) \mathbf{A}_2 \\ \left(\frac{c}{l} F_3^x - \frac{s}{l} F_3^y\right) \mathbf{A}_2 \\ -\left(\frac{s}{l} F_4^x + \frac{c}{l} F_4^y\right) \mathbf{A}_2 \\ \left(\frac{c}{l} F_4^x - \frac{s}{l} F_4^y\right) \mathbf{A}_2 \\ -\left(\frac{s}{l} F_5^x + \frac{c}{l} F_5^y\right) \mathbf{A}_2 \\ \left(\frac{c}{l} F_5^x - \frac{s}{l} F_5^y\right) \mathbf{A}_2 \\ -\left(\frac{s}{l} F_6^x + \frac{c}{l} F_6^y\right) \mathbf{A}_2 \\ \left(\frac{c}{l} F_6^x - \frac{s}{l} F_6^y\right) \mathbf{A}_2 \\ -\left(\frac{s}{l} F_7^x + \frac{c}{l} F_7^y\right) \mathbf{A}_2 \\ \left(\frac{c}{l} F_7^x - \frac{s}{l} F_7^y\right) \mathbf{A}_2 \\ -\left(\frac{s}{l} F_8^x + \frac{c}{l} F_8^y\right) \mathbf{A}_2 \\ \left(\frac{c}{l} F_8^x - \frac{s}{l} F_8^y\right) \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

式中 F_i^x 、 F_i^y ($i=1,2,\dots,8$) 的计算与常规的有限元法中由节点位移求节点力的方法完全一致, 此处不赘述, 于是式(28)变成:

$$\delta \mathbf{q} = \delta \mathbf{t}^T \mathbf{q}_l + \mathbf{t}^T \mathbf{K}_l^e \mathbf{T} \delta \mathbf{P} = (\mathbf{K}_n + \mathbf{t}^T \mathbf{K}_l^e \mathbf{T}) \delta \mathbf{P} \quad (32)$$

即四边形八节点平面单元的大转动小应变切线刚度矩阵 \mathbf{K}_l 为:

$$\mathbf{K}_l = \mathbf{K}_n + \mathbf{t}^T \mathbf{K}_l^e \mathbf{T} \quad (33)$$

2 不平衡力及非线性方程组求解

不平衡力的计算是非线性分析程序中的关键，不平衡力计算方法不正确会引起非线性方程在很小的荷载作用下就无法收敛，在本文程序中，利用式(22)求出每个单元在局部坐标系下的节点位移向量，利用式(27)求出每个单元在局部坐标系下的节点力向量，利用式(24)将局部坐标系下的节点力向量转化成整体坐标系下节点力向量，再按照节点自由度的编号按照“对号入座”的原则将其叠加进去形成结构的抗力矩阵，截止到所计算的荷载步已施加到结构上的荷载矩阵与抗力矩阵之差就形成了非线性方程组右边的不平衡力矩阵；针对由于单元切线刚度矩阵不对称而导致结构总刚度矩阵不对称的问题，程序中通过优化单元节点编号，尽量使每一个单元内部的节点号之差最小，再采用改进的高斯法解方程组，加快计算速度。

3 计算实例

3.1 受竖向集中载荷的悬臂梁^[13]

如图 2 所示悬臂梁长 15m、截面高 1m、厚为 1m，左端固定，右侧悬臂端受竖向集中力 $P = 370.3\text{kN}$ 作用，材料弹性模量 $E = 100000\text{kN/m}^2$ ，为便于与梁的解析解进行比较，泊松比 $\mu = 0$ ；本文按平面应力问题来对其进行求解，将梁沿水平方向划分成 10 个单元(竖向不划分)，悬臂梁端 1/2 高度处位移计算结果(荷载增量法)见表 1(w 为垂直位移、 u 为水平位移)，用荷载增量法和位移增量法计算所得到的悬臂梁端荷载-变形曲线见图 3。

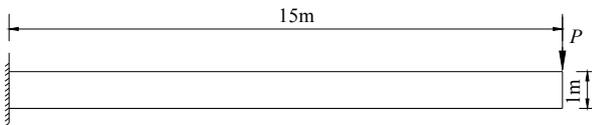


图 2 悬臂端承受集中力的大挠度悬臂梁

Fig.2 Cantilever of large deflection under a concentrated load

表 1 一端受集中力作用的悬臂梁位移

Table 1 Cantilevers large deformation under a concentrated load

PL^2/EI	w/L		u/L	
	解析解	本文解	解析解	本文解
1.0	0.3017	0.3028	0.0564	0.0565
2.0	0.4935	0.4960	0.1606	0.1614
3.0	0.6033	0.6071	0.2544	0.2560
4.0	0.6700	0.6748	0.3289	0.3313
5.0	0.7138	0.7194	0.3876	0.3906

(续表)

$PL^2/(EI)$	w/L		u/L	
	解析解	本文解	解析解	本文解
6.0	0.7446	0.7510	0.4346	0.4381
7.0	0.7674	0.7744	0.4729	0.4769
8.0	0.7850	0.7927	0.5048	0.5092
9.0	0.7991	0.8074	0.5318	0.5366
10.0	0.8106	0.8196	0.5550	0.5600

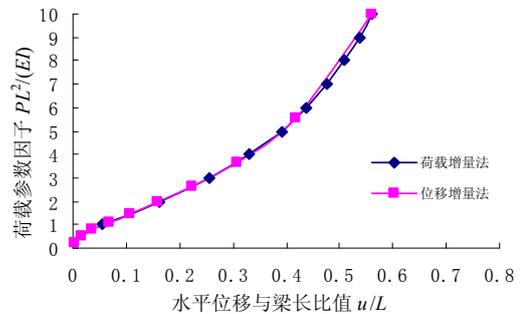
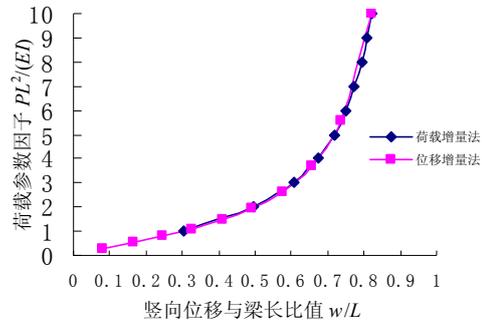


图 3 端部承受集中力的悬臂梁荷载-变形图

Fig.3 Load-deflection curve of Cantilever under a concentrated load

从上述计算结果可以看出：即使在非线性程度较高的条件下，本文程序计算得到的结果与解析解仍有很好的吻合，说明本文中开发的单元精度较高；同时，从图 3 也可看出：用荷载增量法与位移增量法得到的解基本相同，说明本文编制的程序里两种非线性方程组的求解方法是正确的。

3.2 受竖向均布载荷的悬臂梁^[14-15]

梁的几何尺寸、材料参数及边界条件同上例，承受均布荷载 $q\text{kN/m}$ ，按上例同样建模，用本文程序及 ANSYS 里的 PLANE82(将梁划成 10 个单元)进行比较分析，见表 2，可看出两者差别也非常小，与文献[14-15]用梁单元进行分析的结果进行比较(两文献用图示出，无具体数值)，精度是满意的，为考查泊松比的影响，表 3 还列出了在泊松比 $\mu = 0.3$ 时的计算值，可看出计算结果也是令人满意的。

表 2 承受均布荷载的悬臂梁位移($\mu=0$) /m

Table 2 Cantilever's large deformation under a distributed load ($\mu=0$)

q	w		u	
	ANSYS 解	本文解	ANSYS 解	本文解
5	3.7183	3.7204	0.53529	0.53519
10	6.7052	6.7169	1.8303	1.8343
15	8.7547	8.7785	3.3116	3.3260
20	10.105	10.083	4.6707	4.6983
25	11.017	10.986	5.8438	5.8703
30	11.645	11.653	6.8242	6.8508
35	12.088	12.130	7.6263	7.6707
40	12.414	12.465	8.2914	8.3609
45	12.668	12.721	8.8704	8.9472
50	12.866	12.923	9.3631	9.4502

表 3 承受均布荷载的悬臂梁位移($\mu=0.3$) /m

Table 3 Cantilevers large deformation under a distributed load ($\mu=0.3$)

q	w		u	
	ANSYS 解	本文解	ANSYS 解	本文解
10	6.7243	6.7317	1.8351	1.8392
20	10.182	10.162	4.7433	4.7128
30	11.679	11.706	6.8322	6.8720
40	12.465	12.495	8.3364	8.3858
50	12.922	12.954	9.4146	9.4772

3.3 受竖向集中载荷的坦拱

如图 4 所示为一计算跨径 $L=16\text{m}$ ，计算矢高 $f=1.6\text{m}$ ，拱圈厚 $h=0.7\text{m}$ 的平面拱，拱轴中心弧半径 $R=20.8\text{m}$ ，材料弹性模量 $E=3\times 10^{10}\text{N/m}^2$ 和泊松比 $\mu=0$ ，拱顶作用集中力为 λP ，且 $P=1000000\text{N}$ 。计算中将拱脚视为固定，共划分成 $4\times 90=360$ 个平面应力四边形八节点单元，采用位移增量法求解，选拱顶截面的竖向位移为迭代控制变量，本模型的几何非线性解——拱跨中位移与荷载的关系示于图 5，该图反映出拱的典型非线性稳定曲线，曲线中拱有一个上临界荷载点和一个下临界荷载点，在拱顶截面的竖向位移达到 1.2m 时，荷载系数达到最大值 101.605 ；之后曲线进入下降段，在拱顶截面的竖向位移达到 2.3m 时，荷载系数达到最小值 92.135 ，之后又进入了上升段；本文所得到的拱跨中位移与竖向集中荷载的关系曲线图与相关文献所得到的计算结果是一致的；同时，对本算例分别按 1×90 、 2×90 、 3×90 、 4×90 四种不同网格划分，所得到的拱跨中位移与竖向集中荷载的关系曲线图见图 6，不同网格划分所对应的上临界荷载点和下临界点见表 4，从该表可看出：在第二种单元网格(2×90)划分后再沿拱截面方向将网格加密对计算结果影响甚微，说明本文所介绍的单元

具有很好的精度和稳定性。

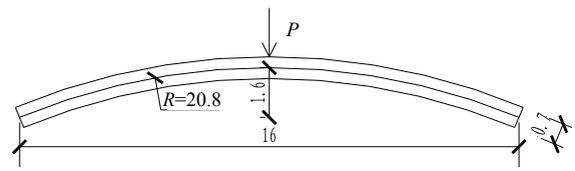


图 4 跨中受竖向集中载荷的坦拱 /m

Fig.4 shallow arch under a single concentrated load in crown of arch

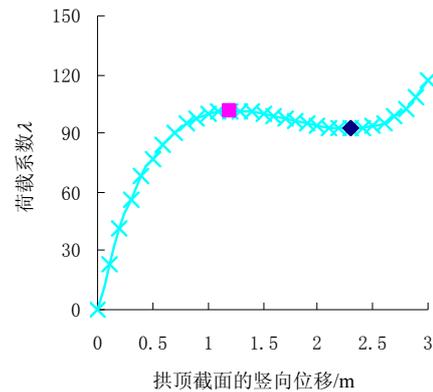


图 5 拱顶位移与荷载系数的关系曲线图

Fig.5 Load-deflection curve of shallow arch under a concentrated load in crown of arch

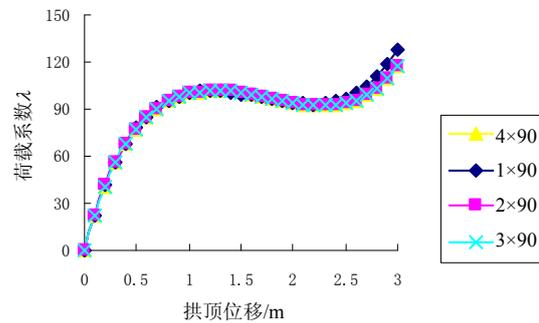


图 6 不同网格划分下的拱顶位移与荷载系数的曲线图

Fig.6 Load-deflection curves of shallow arch for different element partition

表 4 不同单元网格划分所对应的上临界荷载点和下临界荷载点

Table 4 Upper critical load and lower critical load for different element partition

	上临界荷载点		下临界荷载点		竖向位移 3m 时的荷载系数 λ
	荷载系数 λ	对应位移值/m	荷载系数 λ	对应位移值/m	
1x90	101.84	1.2	93.19	2.2	127.78
2x90	101.61	1.2	92.39	2.2	116.89
3x90	101.60	1.2	92.39	2.2	116.79
4x90	101.61	1.2	92.14	2.3	116.75

4 结论

本文通过将局部坐标系原点建立在角节点，以

作为坐标系原点的角节点到相邻角节点的方向为 X 轴, 基于场一致性的原则, 采用共旋坐标法导出了四边形八节点平面单元在大转动、小应变条件下的几何非线性单元切线刚度矩阵, 并编制了相应的几何非线性计算程序, 尽管这一单元刚度矩阵是不对称的, 但对承受端部集中荷载和全梁均布荷载的悬臂梁与拱顶承受竖向集中荷载的坦拱进行计算, 结果表明该单元具有很好的精度和稳定性。本文采取在局部坐标系内计算单元的线性刚度矩阵, 几何非线性通过转换矩阵来实现, 这算法在做几何与材料的双重非线性时将很具有适用性, 可以通过在局部坐标系中采用非线性的本构关系, 总体坐标系中考虑几何非线性, 达到将双非线性解耦的目的; 同时, 从前述的式(33)可看出, 在计算单元切线刚度矩阵时由于降低了相关矩阵的阶次, 使得计算量能明显减少, 这在耗时较大的非线性计算中意义尤其明显, 具有一定的实用价值。

参考文献:

- [1] Felippa C A, Haugen B. A unified formulation of small-strain co-rotational finite elements: I. Theory [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194: 2285—2335.
- [2] Rankin C C, Brogan F A. An element independent co-rotational procedure for the treatment of large rotation [J]. *ASME J Pressure Vessel Technol*, 1986, 108: 165—174.
- [3] Crisfield M A, Moita G F. A co-rotational formulation for 2-D continua including incompatible modes [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, 39: 2619—2633.
- [4] Yang H T Y, Saigal S, Masud A, Kapania R K. A survey of recent shell finite elements [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 47: 101—127.
- [5] Tham C L, Zhang Z, Masud A. An elasto-plastic damage model cast in a co-rotational kinematic framework for large deformation analysis of laminated composite shells [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194: 2641—2660.
- [6] Izzuddin B A. An enhanced co-rotational approach for large displacement analysis of plates [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 64: 1350—1374.
- [7] Ki-DuKim, Chang-SooLee, Sung-Cheon Han. A 4-node co-rotational ANS shell element for laminated composite structures [J]. *Composite Structures*, 2007, 80: 234—252.
- [8] Kim K D, Lomboy G R, Han S C. A co-rotational 8-node assumed strain shell element for postbuckling analysis of laminated composite plates and shells [J]. *Computational Mechanics*, 2003, 30: 330—342.
- [9] Li Z X, Izzuddin B A, Vu-Quoc L. A 9-node co-rotational quadrilateral shell element [J]. *Computational Mechanics*, 2008, 42: 873—884.
- [10] Joseph M Pajot, Kurt Maute. Analytical sensitivity analysis of geometrically nonlinear structures based on the co-rotational finite element method [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2006, 42: 900—913.
- [11] Nélvio Dal Cortivo, Carlos A Felippa, Henri Bavestrello, William T M Silva. Plastic buckling and collapse of thin shell structures using layered plastic modeling and co-rotational ANDES finite elements [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198: 785—798.
- [12] Izzuddin B A. An enhanced co-rotational approach for large displacement analysis of plates [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 64: 1350—1374.
- [13] 陈至达. 杆、板、壳大变形理论[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
Chen Zhida. Large deflection theory of truss, plate and shell [M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese)
- [14] Liang J, Olson M D. Large elastic-plastic deformations of slender beams: Co-rotational theory vs. von Karman theory [J]. *Computational Mechanics*, 1994, 15: 117—128.
- [15] Kondoh K, Atluri S N. Large-deformation elasto-plastic analysis of frames under nonconservative loading, using explicitly derived tangent stiffnesses based on assumed stresses [J]. *Computational Mechanics*, 1987, 2: 1—25.