

文章编号: 1000-4750(2006)01-0001-05

## 基于解析试函数的内参型广义协调膜元

\*傅向荣<sup>1</sup>, 龙驭球<sup>2</sup>, 袁明武<sup>1</sup>, 岑松<sup>3</sup>

(1. 北京大学力学与工程科学系, 北京 100871; 2. 清华大学土木工程系, 北京 100084; 3. 清华大学工程力学系, 北京 100084)

**摘 要:** 利用解析试函数法构造一个内参型四结点八自由度广义协调膜元。根据弹性力学平面问题的控制方程和艾雷应力函数, 求出问题完备的基本解析解, 然后用其作为试函数并采用广义协调条件来构造单元: ATF-GCQ4X。该单元采用了 14 个解析试函数构造了应变二次完备的内部场, 同时引入 6 个附加边界位移模式, 采用平衡力系为权函数构造相应的广义协调条件。数值算例表明, 该类内参型单元能在不提高单元结点自由度的情况下提高单元精度, 并显示出良好的收敛特性。

**关键词:** 力学; 有限元; 新方法; 解析试函数; 内参

**中图分类号:** TB115 **文献标识码:** A

## A GENERALIZED CONFORMING PLANE ELEMENT WITH INTERNAL PARAMETERS BASED ON ANALYTICAL TRIAL FUNCTIONS

\*FU Xiang-rong<sup>1</sup>, LONG Yu-qiu<sup>2</sup>, Yuan Ming-wu<sup>1</sup>, Cen Song<sup>3</sup>

(1. Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China;

2. Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

3. Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** Based on the analytical trial functions, a 4-node 8 degrees-of-freedom generalized conforming plane element with internal parameters is developed in this paper. From the governing equations of the elastic plane problem and the Airy stress function, the complete basic analytical solutions are derived and used as the trial functions to formulate the element: ATF-GCQ4X. Fourteen analytical trial functions form the second order complete inner field for strain while six additional boundary displacement modules are used as internal parameters. Balance forces are used to form the generalized conforming equations. Numerical examples show that the proposed element with internal parameters can enhance the precision without increasing degree-of-freedom, and satisfactory convergence rate is achieved.

**Key words:** mechanics; finite element; new method; analytical trial function; internal parameter

四结点八自由度四边形膜元是有限元分析中最常用的单元, 提高其精度一直是有限元研究的一个方向。在等参元的体系下, 一方面, 发展了大量

的 Lagrange、Serendipity 和升阶谱单元, 这类单元在提高单元的精度时往往也要带来单元结点数及自由度数的增加。另一方面, 内参型单元可以

收稿日期: 2003-12-31; 修改日期: 2004-12-30

基金项目: 国家自然科学基金(10272063); 高等学校博士学科点专项科研基金(20020003044); 清华大学基础研究基金(JC2002003); 全国优秀博士论文作者专项基金(200242); 中国博士后科学基金(2003033071)

作者简介: \*傅向荣(1972), 男, 湖南人, 博士后, 从事有限元理论及应用, 结构工程研究(E-mail: fuxr@pku.edu.cn); 龙驭球(1926), 男, 湖南人, 教授, 中国工程院院士, 从事有限元理论及应用, 结构工程研究; 袁明武(1939), 男, 江苏人, 教授, 从事有限元理论及应用, 软件开发, 计算力学研究; 岑松(1972), 男, 福建人, 博士, 从事有限元理论及应用, 结构工程研究。

在不提高单元出口自由度的基础上提高单元的精度, Wilson 提出的 Q6<sup>[1]</sup>, R. L. Taylor 等提出的 QM6<sup>[2]</sup>, T. H. Pian 和吴长春等提出的 NQ6<sup>[3]</sup>都在这方面作出了努力。文[4]推导了内参型单元的通用模式。

解析试函数法较好的解决了四结点四边形等参膜元普遍容易出现网格畸变敏感性问题<sup>[5]</sup>。并克服了应力奇点问题<sup>[6-8]</sup>和厚薄通用板单元的剪切闭锁问题<sup>[9]</sup>。本文探讨基于解析试函数的有限元单元新体系下构造内参型单元的可能性。

## 1 平面问题的解析基本解

在平面弹性问题中, 可以从艾雷应力函数出发, 推导平面问题的解析基本解<sup>[5]</sup>, 表 1~3 给出了前 14 项应变二次完备的基本解。

表 1 平面问题的解析基本解(常应变)

Table 1 Basic analytical solutions of the plane problem  
(Constant strain)

项数	1	2	3	4	5	6
$\varphi$	1	$x$	$y$	$xy$	$x^2$	$y^2$
$\sigma_x$	0	0	0	0	0	1
$\sigma_y$	0	0	0	0	1	0
$\tau_{xy}$	0	0	0	-1	0	0
$\varepsilon_x$	0	0	0	0	$-\mu$	1
$\varepsilon_y$	0	0	0	0	1	$-\mu$
$\gamma_{xy}$	0	0	0	-2	0	0
$u$	1	0	$y$	$y$	$-\mu x$	$x$
$v$	0	1	$-x$	$x$	$y$	$-\mu y$

表 2 平面问题的解析基本解(一次应变)

Table 2 Basic analytical solutions of the plane problem  
(1st order strain)

项数	7	8	9	10
$\varphi$	$x^3$	$y^3$	$x^2y$	$y^2x$
$\sigma_x$	0	$2y$	0	$2x$
$\sigma_y$	$2x$	0	$2y$	0
$\tau_{xy}$	0	0	$-2x$	$-2y$
$\varepsilon_x$	$-2\mu x$	$2y$	$-2\mu y$	$2x$
$\varepsilon_y$	$2x$	$-2\mu y$	$2y$	$-2\mu x$
$\gamma_{xy}$	0	0	$-4(1+\mu)x$	$-4(1+\mu)y$
$u$	$-\mu x^2 - y^2$	$2xy$	$-2\mu xy$	$x^2 - (2+\mu)y^2$
$v$	$2xy$	$-\mu y^2 - x^2$	$y^2 - (2+\mu)x^2$	$-2\mu xy$

表 3 平面问题的解析基本解(二次应变)

Table 3 Basic analytical solutions of the plane problem  
(2nd order strain)

项数	11	12	13	14
$\varphi$	$x^3y$	$xy^3$	$(x^4 - y^4)/4$	$(6x^2y^2 - x^4 - y^4)/4$
$\sigma_x$	0	$6xy$	$-3y^2$	$3x^2 - 3y^2$
$\sigma_y$	$6xy$	0	$3x^2$	$3y^2 - 3x^2$
$\tau_{xy}$	$-3x^2$	$-3y^2$	0	$-6xy$
$\varepsilon_x$	$-6\mu xy$	$6xy$	$-3y^2 - 3\mu x^2$	$3x^2 - 3y^2$
$\varepsilon_y$	$6xy$	$-6\mu xy$	$3\mu y^2 + 3x^2$	$3y^2 - 3x^2$
$\gamma_{xy}$	$-6(1+\mu)x^2$	$-6(1+\mu)y^2$	0	$-12xy$
$u$	$-3\mu x^2y - y^3$	$3yx^2 - (2+\mu)y^3$	$-3y^2x - \mu x^3$	$x^3 - 3xy^2$
$v$	$3xy^2 - (2+\mu)x^3$	$-3\mu y^2x - x^3$	$\mu y^3 + 3x^2y$	$y^3 - 3x^2y$

## 2 边界位移模式

在等参元中引入恰当的非协调位移模式可较好的改善单元的性能, 但不能保证单元一定收敛<sup>[6-8]</sup>。文[4]在广义协调元的框架下提出了一系列的广义协调位移模式, 称为广义泡状位移, 在等参元中引入该类位移模式可以保证单元收敛。文献[10]提出了对能量泛函进行修改以确保任何非协调位移模式都收敛的常应力乘法。

本文单元的边界位移模式除采用协调元的八个结点位移  $\{\tilde{u}_q \ \tilde{v}_q\}^T$  外, 还采用六个附加的边界位移  $\{\tilde{u}_\lambda \ \tilde{v}_\lambda\}^T$ 。其中,

$$\tilde{u}_q = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \tilde{u}_i \quad \tilde{v}_q = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \tilde{v}_i \quad (1)$$

式中,

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad (2)$$

附加的 6 个广义泡状位移为:

$$\tilde{u}_\lambda = \sum_{i=1}^3 N_{\lambda i}(\xi, \eta) \tilde{\lambda}_i \quad \tilde{v}_\lambda = \sum_{i=4}^6 N_{\lambda i}(\xi, \eta) \tilde{\lambda}_i \quad (3)$$

其中,

$$\begin{aligned} N_{\lambda 1} &= \xi^2 - 1 & N_{\lambda 2} &= \xi(\xi^2 \eta^2 - \frac{1}{3}) \\ N_{\lambda 3} &= \eta(\xi^2 \eta^2 - \frac{1}{3}) & N_{\lambda 4} &= \eta^2 - 1 \\ N_{\lambda 5} &= \xi(\xi^2 \eta^2 - \frac{1}{3}) & N_{\lambda 6} &= \eta(\xi^2 \eta^2 - \frac{1}{3}) \end{aligned} \quad (4)$$

所以, 单元的边界位移模式为:

$$\tilde{u} = \tilde{u}_q + \tilde{u}_\lambda \quad \tilde{v} = \tilde{v}_q + \tilde{v}_\lambda \quad (5)$$

其中, 包含了基本未知量八个结点位移  $\{q\}^T$  和六个内部参数  $\{\lambda\}^T$  共十四个参数。

### 3 基于平衡力系的广义协调条件

当选取表 1、2、3 中应变二次完备的前十四项解析基本解为试函数构造含十四参数  $\{\beta\}^T$  的内部场,以四结点的八个线位移  $\{q\}^T$  为基本未知量结合六个内部参数  $\{\lambda\}^T$  共十四参数描述单元的边界位移,采用两个点协调和十二个周协调的广义协调条件(6)构造的内参型膜元,可以记为 ATF-GCQ4X。

$$\begin{cases} \sum (u-\tilde{u})_i = 0 & \sum (v-\tilde{v})_i = 0 \\ \oint l(u-\tilde{u})ds = 0 & \oint l(v-\tilde{v})ds = 0 \\ \oint m(u-\tilde{u})ds = 0 & \oint m(v-\tilde{v})ds = 0 \\ \oint [T_{xj}(u-\tilde{u}) + T_{yj}(v-\tilde{v})]ds = 0 & j=7, \dots, 14 \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $m$ 、 $l$  为方向余弦。

下标  $i$  指变量在结点  $i$  处的值。

$u$ 、 $v$  为试函数给出的单元位移。

$\tilde{u}$ 、 $\tilde{v}$  为由(5)式决定的单元边界位移。

权函数  $T_{xj}$ 、 $T_{yj}$  为由平衡力系构造的边界力。

$$\begin{cases} T_{xj} = l\sigma_{xj} + m\tau_{xyj} \\ T_{yj} = l\tau_{xyj} + m\sigma_{yj} \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $\sigma_{xj}$ 、 $\sigma_{yj}$  和  $\tau_{xyj}$  为对应于某一平衡力系的应力分量。本文中采用表 2、3 中八个解析试函数的应力分量。

由(6)式可得到内部场的十四参数  $\{\beta\}^T$  与边界位移的十四参数  $\{q\}^T$ 、 $\{\lambda\}^T$  的相应协调关系:

$$\{\beta\} = [T] \begin{Bmatrix} q \\ \lambda \end{Bmatrix} \quad (8)$$

其中,  $[T]$  可由(6)式进行数值积分取得。

### 4 内参型解析单元的变分原理

根据 Hellinger-Reissner 原理,二类泛函变量  $(\tilde{u}, \varepsilon)$  的无条件泛函可采用<sup>[11]</sup>:

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}(\tilde{u}, \varepsilon) = & \iint_V [(D^T \tilde{u})^T A \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^T A \varepsilon - \bar{F}^T \tilde{u}] dV - \\ & \int_{S_u} (\tilde{u} - \bar{u})^T L A \varepsilon ds - \int_{S_\sigma} \bar{T}^T \tilde{u} ds \end{aligned} \quad (9)$$

式中,  $\tilde{u}$ 、 $\varepsilon$  为独立假定的位移和应变,

$\bar{F}$  为给定的内部力,

$S_u$  为给定位移边界,  $S_\sigma$  为给定力的边界,

$\bar{u}$  和  $\bar{T}$  分别为给定的边界位移和边界力,

$A$  为本构关系矩阵,

$D$  为微分算子,有,

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$L$  为转换矩阵,有,

$$L = \begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix} \quad (11)$$

式(9)取驻值相应于基本方程:

$$A D \varepsilon + \bar{F} = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \quad (12)$$

$$\varepsilon - D^T \tilde{u} = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \quad (13)$$

$$\tilde{u} - \bar{u} = 0 \quad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \quad (14)$$

$$L A \varepsilon - \bar{T} = 0 \quad (\text{在 } S_\sigma \text{ 上}) \quad (15)$$

由于解析试函数法采用问题的基本解析解为内部场的试函数,所以对应变  $\varepsilon$  存在  $\sigma$  使得:

$$\sigma = A \varepsilon \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \quad (16)$$

$$D \sigma = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \quad (17)$$

因此,(9)式右端第一项可化为:

$$\begin{aligned} & \iint_V (D^T \tilde{u})^T A \varepsilon dV = \\ & \iint_V \left[ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dV = \\ & \iint_V \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \tau_{xy} \right) dV = \\ & \iint_V \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \tau_{xy} \right) dV - \\ & \iint_V \left[ \tilde{u} \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + \tilde{v} \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \right] dV = \\ & \oint (l \tilde{u} \sigma_x + m \tilde{v} \sigma_y + m \tilde{u} \tau_{xy} + l \tilde{v} \tau_{xy}) ds = \\ & \oint (\tilde{u}^T L \sigma) ds = \oint (\tilde{u}^T L A \varepsilon) ds \end{aligned} \quad (18)$$

注意上式推导中用到了(17)式,因此,(18)式只有在采用解析基本解作为试函数时才能成立。

将(18)式代入(9)式,可得,

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}(\tilde{u}, \varepsilon) = & - \iint_V \left( \frac{1}{2} \varepsilon^T A \varepsilon \right) dV - \iint_V \bar{F}^T \tilde{u} dV + \\ & \oint (\tilde{u}^T L A \varepsilon) ds - \int_{S_u} (\tilde{u} - \bar{u})^T L A \varepsilon ds - \int_{S_\sigma} \bar{T}^T \tilde{u} ds \end{aligned} \quad (19)$$

此即为常见的应力杂交元所采用的能量泛函,对式(19)取驻值可得到应力杂交元的单元刚度矩阵。下面证明采用解析试函数构造的平衡力系为权函数的周协调条件等价于对式(19)取驻值。

由于解析试函数法采用问题的基本解析解为内部场的试函数,所以对应变  $\varepsilon$  存在  $u$  使得:

$$\varepsilon = D^T u \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \quad (20)$$

与式(18)推导过程相同,式(19)式右端第一项

可化为：

$$\iint_V \left( \frac{1}{2} \varepsilon^T A \varepsilon \right) dV = \iint_V \left( \frac{1}{2} (D^T u)^T A \varepsilon \right) dV = \oint \left( \frac{1}{2} u^T L A \varepsilon \right) ds = \oint \left( \frac{1}{2} (T_x u + T_y v) \right) ds \quad (21)$$

将(21)代入(19)并对内部场参数  $\{\beta\}$  取驻值即可得(6)式所列周协调条件。其中，对刚体平移采用了点协调条件，对线性应力对应的周协调条件与刚体转动进行了组合。

为使单元通过强式分片试验，引入文献[10]提出的常应力乘子法对泛函进行了修正。

$$\Pi_{mHR}(\tilde{u}, \varepsilon) = \Pi_{HR}(\tilde{u}, \varepsilon) - \oint (\tilde{u}_\lambda^T L A \varepsilon_c) ds \quad (22)$$

其中， $\tilde{u}_\lambda$  为附加位移项， $\varepsilon_c$  常应变项。 $\tilde{u}_\lambda$  将通过静力凝聚消除。

### 5 数值算例

#### 5.1 MacNeal 细长梁

如图 2 所示悬臂梁，计算端部受单位弯矩及单位剪力时的端点挠度<sup>[12]</sup>。悬臂梁长为 6、高为 0.2、厚为 0.1，弹性常数为： $E=1e7$ ， $\mu=0.3$ 。分别用矩形网格(A)、平行四边形网格(B)、梯形网格(C)进行分析，杆端位移的精确解为 0.1080，有限元分析精度如表 4 所示：

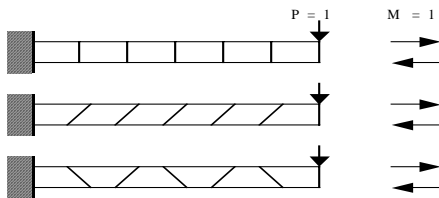


图 2 MacNeal 细长梁

Fig.2 MacNeal slender beam

表 4 MacNeal 梁结果

Table 4 Results of MacNeal beam

网格	Q4	P-S 元 <sup>[13]</sup>	QM6 <sup>[2]</sup>	ATF-GCQ4X
A (P=I)	0.0934	0.9930	0.9930	1.0232
B (P=I)	0.0342	0.7950	0.6230	0.9962
C (P=I)	0.0269	0.2180	0.0440	0.6687
A (M=I)	0.0933	1.0000	1.0000	1.0296
B (M=I)	0.3086	0.8520	0.7220	1.0210
C (M=I)	0.0222	0.1670	0.0370	0.7583

#### 5.2 有限尺寸的强式分片试验

如图 3 所示处于单位常应变状态匀质板，一端简支，一端承受均布拉力，受拉端等效结点荷载为

$T=96$ 。其中，板长 0.24、宽 0.12、厚 0.001，弹性常数为： $E=1e6$ 、 $\mu=0.25$ 。采用本文提出单元分析，各结点的水平位移计算结果如表 5 所示：

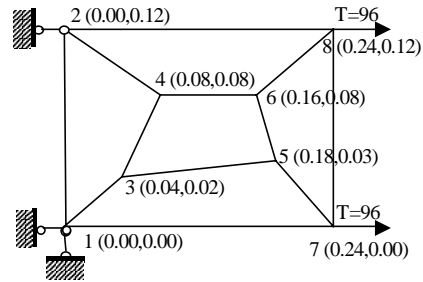


图 3 有限尺寸分片试验

Fig.3 Patch test in the coarse mesh

表 5 有限尺寸分片试验结果

Table 5 Results of patch test in the coarse mesh

结点	1	2	3	4
位移	0.00	0.00	0.04	0.08
结点	5	6	7	8
位移	0.18	0.16	0.24	0.24

#### 5.3 纯弯场下网格敏感度实验

如图 4 所示受纯弯悬臂梁，当网格畸变参数  $d$  增大时，计算端点挠度。梁长为 10、高为 2、厚为 1，弹性常数为： $E=1500$ 、 $\mu=0.25$ 。杆端位移的精确解为 100，有限元分析相对精度如表 6 所示：

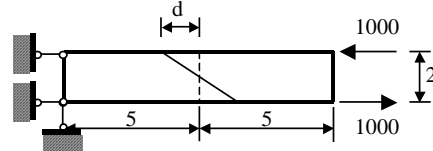


图 4 网格敏感度实验

Fig.4 Mesh sensitivity test

表 6 网格敏感度实验结果

Table 6 Results of mesh sensitivity test

d	Q4	P-S 元 <sup>[13]</sup>	QM6 <sup>[2]</sup>	ATF-GCQ4X
0.0	0.2804	1.0000	1.0000	1.1388
1.0	0.1410	0.6290	0.6270	1.0428
2.0	0.0961	0.5500	0.5440	0.6143
3.0	0.0805	0.5470	0.5360	0.5751
4.0	0.0666	0.5310	0.5120	0.6212
4.9	0.0544	0.4980	0.4680	0.6791

#### 5.4 Cook 变断面斜悬臂梁

如图 5 所示变断面悬臂短梁，端部承受均布剪力，合力为 1。梁厚 0.01，弹性常数为： $E=1500$ 、

$\mu=1/3$ 。计算不同网格下端部中点竖向位移，参考解为 23.96<sup>[14]</sup>，有限元分析的相对精度如表 7 所示：

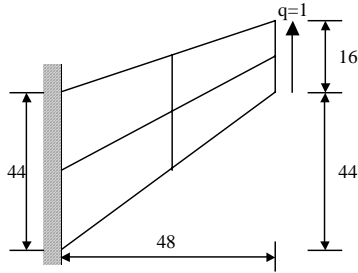


图 5 Cook 梁

Fig.5 Cook panel

表 7 Cook 梁结果

Table 7 Results of Cook panel

网格	Q4	P-S <sup>[13]</sup>	QM6 <sup>[7]</sup>	ATF-GCQ4X
2*2	0.4896	0.8819	0.8785	1.0635
4*4	0.7613	0.9607	0.9607	0.9959
8*8	0.9199	/	/	0.9973
16*16	0.9770	0.9966	/	0.9990
32*32	0.9933	/	/	0.9998
64*64	0.9982	/	/	1.0001
128*128	0.9996	/	/	1.0002

## 6 总结

本文探讨了构造内参型解析单元的方法，使在不提高单元自由度的基础上提高解析单元性能成为可能。研究表明，使用解析试函数对应的平衡力系构造的广义周协调条件与杂交元方法具有等价性。但这种等价性只有在解析试函数的框架下才能有严密的理论依据。这对广义协调元和杂交元的发展都有一定的启示。本文从理论上进一步完善了解析试函数法。

数值实验表明，ATF-GCQ4X 单元能给出任意网格下的平面常应变问题的精确解，即通过强式分片实验；同时降低了在纯弯、弯剪应力状态下解对网格畸变的敏感性。在复杂应力状态下，单元有很高的精度，并具有良好的数值稳定性和收敛性。

### 参考文献：

[1] E L Wilson, R L Taylor, W P Doherty. Incompatible displacement models, Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics [C]. In: S. J. Fenves et al., eds, Academic Press, New York, 1973. 43~57.  
 [2] R L Taylor, P J Beresford, E L Wilson. A non-conforming element for stress analysis [J]. Int. J. Num. Meth. Engng., 1976(10): 1211~1219.  
 [3] Pian T H H, C C Wu. General formulation of

incompatible shape function and an incompatible isoparametric element [C]. Proc. Invitational China-American Workshop on FEM, Chende, China, 1986: 159~165.

- [4] 张春生. 广义协调元法与内参型附加非协调位移基本项研究[D]. 北京: 清华大学土木工程系, 2001.  
 Zhang Chunsheng. Generalized conforming element method and basic formulations of additional incompatible displacement on internal parameters [D]. Beijing: Civil Engineering Department of Tsinghua University, 2001. (in Chinese)  
 [5] 傅向荣, 龙驭球. 基于解析试函数的广义协调四边形膜元[J]. 工程力学, 2002, 19(4): 12~16.  
 Fu Xiangrong, Long Yuqiu. Generalized conforming quadrilateral plane elements based on analytical trial functions [J]. J. Engineering Mechanics, 2002, 19(4): 12~16. (in Chinese)  
 [6] 龙驭球, 支秉琛, 匡文起, 单建. 分区混合有限元法计算应力强度因子[J]. 力学学报, 1982, 4: 341~353.  
 Long Yuqiu, Zhi Bingchen, Kuang Weiqi, Shan Jian. Subregion mixed finite element method for the calculation of stress intensity factor [J]. Acta Mechanica Sinica, 1982, 4: 341~353. (in Chinese)  
 [7] 傅向荣, 龙驭球. 分区混合元法分析平面裂纹问题[J]. 工程力学, 2001, 18(6): 39~46.  
 Fu Xiangrong, Long Yuqiu. Fracture analysis with the sub-region mixed element method [J]. Engineering Mechanics, 2001, 18(6): 39~46. (in Chinese)  
 [8] 傅向荣, 龙驭球. 解析试函数法分析平面切口问题[J]. 工程力学, 2003, 20(4): 33~38.  
 Fu Xiangrong, Long Yuqiu. Analysis of the plane notch problems with analytical trial function method [J]. Engineering Mechanics, 2003, 20(4):33~38. (in Chinese)  
 [9] 龙驭球, 傅向荣. 基于解析试函数的广义协调四边形厚板元[J]. 工程力学, 2002, 19(3): 10~15.  
 Long Yuqiu, Fu Xiangrong. Two generalized conforming quadrilateral thick plate elements based on analytical trial functions [J]. J. Engineering Mechanics, 2002, 19(3): 10~15. (in Chinese)  
 [10] 吴长春. 非协调数值分析与杂交元方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997.  
 Wu Changchun. Incompatible numerical analysis and hybrid element method [M]. Beijing: Science Press, 1997. (in Chinese)  
 [11] 龙驭球. 变分原理-有限元-壳体分析[M]. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1987.  
 Long Yuqiu. Variational principles, finite element method, analysis of shells [M]. Shenyang: Liaoning Science and Technology Press, 1987. (in Chinese)  
 [12] Richard H. MacNeal. Toward a defect-free four-noded membrane element [C]. Finite Elements in Analysis and Design, 1989, (5): 31~37.  
 [13] Pian T H H, Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite element [J]. Int. J. Num. Meth. Engng. 1984, 20: 1685~1695.  
 [14] 须寅. 广义协调法及具有旋转自由度的膜元和板壳元研究[D]. 北京: 清华大学土木工程系, 1994.  
 Xu Yin. The generalized conforming approach and the development of the membrane elements with drilling degrees of freedom and thin plate and shell elements [D]. Beijing: Civil Engineering Department of Tsinghua University, 1994. (in Chinese)