文章编号：1000-4750(2010)10-0042-05

双参数三次 Hermite 插值逐步积分法求解结构动力响应

袁晓彬[1]，赵 晓[2]，方冬慧[1]，*王清远[1]

(1. 四川大学建筑与环境学院，成都 610065；2. 成都理工大学地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室，成都 610059)

摘 要：为了求解结构动力学响应，该文提出了一种新的逐步积分法。通过三次 Hermite 插值在局部时间域上对位移、速度进行离散，给出了逐步递推计算格式；采用双参数控制算法的稳定性和计算精度。该方法具有自起步、计算精度较高、无需中间计算环节的特点。通过与 Newmark 法、Wilson 法、精细积分法的数值结果对比分析，表明该方法是准确可靠的。

关键词：动力学响应；逐步积分法；三次 Hermite 插值；双参数；稳定性

中图分类号：TU311.3 **文献标识码**：A

A NEW STEP-BY-STEP INTEGRATION METHOD BASED ON 3-ORDER HERMITE INTERPOLATION BY DOUBLE-PARAMETER FOR DYNAMIC RESPONSE

YUAN Xiao-bin[1], ZHAO Xiao[2], FANG Dong-hui[1], *WANG Qing-yuan[1]

(1. College of Architecture and Environment, Sichuan University, Chengdu 610065, China;

2. State Key Laboratory of Geohazard Prevention & Geoenvironment Protection, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

Abstract: In order to obtain a structural dynamic response, a new step-by-step integration method is presented. The step-by-step recursion method is introduced by 3-order Hermite interpolation of nodal displacements and velocities within a local time domain; two different parameters are varied to obtain good stability and accuracy. This method is characterized with self-starting, high precision and no middle computational procedure. The example result comparison with those of Newmark, Wilson, precise integration, shows that this method is accurate and reliable.

Key words: dynamic response; step-by-step integration method; 3-order Hermite interpolation; double-parameter; stability

结构动力学响应的数值计算有许多计算方法。Newmark 提出了基于常加速度假设的 Newmark 法[1]；Wilson 提出了基于线性加速度假设的 Wilson 法[2]；Hulbert 提出了有二阶精度一个控制参数的显式广义 α 法[3]。袁晓彬采用龙格-库塔法求解二次常微分方程组[4]；钟万勰提出了精细积分法[5]。众多学者建立了各种类型的时间有限元法：刘铁林[6]、徐洪香[7]等提出了基于 Gurtin 变分原理的时间有限元法；Born[8]、黄川[9]等提出了基于哈密顿原理的时间有限元法；邢向华[10]、于开平[11]、Hulbert[12]

收稿日期：2009-04-08；修改日期：2010-01-07

基金项目：教育部创新团队资助项目(IRT0640)；教育部博士点基金项目(200806100044)

作者简介：袁晓彬(1970－)，男，四川中江人，博士生，从事计算力学、结构振动的研究(E-mail: cocoyxbyxb@sina.com)；
赵 晓(1978－)，女，山东青岛人，讲师，博士生，从事再生混凝土、结构振动的研究(E-mail: zhaoxiao@cdut.cn)；
方冬慧(1984－)，女，四川成都人，硕士生，从事结构可靠性分析研究(E-mail: fx2172321@163.com)；
*王清远(1965－)，男，重庆人，教授，博士，博导，从事工程力学、新型材料与结构力学问题研究(E-mail: wangqy@scu.edu.cn).

则从加权残差法出发建立时间有限元法。精细积分法、龙格-库塔法都是理论上精确的方法，其计算精度高，但计算量大，不采用参数控制计算格式的精度和稳定性，其精度和稳定性比较依赖于时间步长。其它的方法如 Newmark 法、Wilson 法还是各种形式的时间有限元法大多采用单一参数来控制计算格式的精度和稳定性。

本文采用三次 Hermite 插值，通过双参数来建立平衡递推方程，进而控制计算格式的精度和稳定性，构造出了求解结构动力学响应的一种新的逐步积分法。该方法具有自起步、精度较高、无中间计算环节的特点。

1　计算原理

在区间$[0,\Delta t]$三次 Hermite 插值公式可以表示为[13]：

$$y = a_0(t)y_0 + a_1(t)y_1 + b_0(t)\dot{y}_0 + b_1(t)\dot{y}_1 \tag{1}$$

这里y_0、$\dot{y}_0$分别表示在$t=0$时的值和一阶导数，y_1、$\dot{y}_1$分别表示在$t=\Delta t$时的值和一阶导数。其中：

$$a_0(t) = \left(1+2\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right)\left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\right)^2 \tag{1a}$$

$$a_1(t) = \left(1+2\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\right)\left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right)^2 \tag{1b}$$

$$b_0(t) = (t-t_0)\left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\right)^2 \tag{1c}$$

$$b_1(t) = (t-t_1)\left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right)^2 \tag{1d}$$

对式(1a)、式(1b)、式(1c)、式(1d)取$t=\theta\Delta t$，$t_0=0$，$t_1=\Delta t$代入并化简得：

$$a_0 = (1+2\theta)(\theta-1)^2 \tag{2a}$$

$$a_1 = (3-2\theta)\theta^2 \tag{2b}$$

$$b_0 = \theta(\theta-1)^2\Delta t \tag{2c}$$

$$b_1 = (\theta-1)\theta^2\Delta t \tag{2d}$$

对式(1a)、式(1b)、式(1c)、式(1d)求一阶导数，并取$t=\theta\Delta t$，$t_0=0$，$t_1=\Delta t$代入并化简得：

$$\dot{a}_0 = \frac{6\theta(\theta-1)}{\Delta t} \tag{3a}$$

$$\dot{a}_1 = \frac{6\theta(1-\theta)}{\Delta t} \tag{3b}$$

$$\dot{b}_0 = (\theta-1)(3\theta-1) \tag{3c}$$

$$\dot{b}_1 = \theta(3\theta-2) \tag{3d}$$

对式(1a)、式(1b)、式(1c)、式(1d)求二阶导数，并取$t=\theta\Delta t$，$t_0=0$，$t_1=\Delta t$代入并化简得：

$$\ddot{a}_0 = \frac{6(2\theta-1)}{\Delta t^2} \tag{4a}$$

$$\ddot{a}_1 = \frac{6(1-2\theta)}{\Delta t^2} \tag{4b}$$

$$\ddot{b}_0 = \frac{6\theta-4}{\Delta t} \tag{4c}$$

$$\ddot{b}_1 = \frac{6\theta-2}{\Delta t} \tag{4d}$$

考察单自由度振动的基本方程：

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t) \tag{5}$$

在时刻$t=\theta\Delta t$的平衡，将式(2)、式(3)、式(4)代入式(5)，整理得：

$$\begin{aligned}&m[\ddot{a}_0(\theta)y_0 + \ddot{a}_1(\theta)y_1 + \ddot{b}_0(\theta)\dot{y}_0 + \ddot{b}_1(\theta)\dot{y}_1] + \\ &c[\dot{a}_0(\theta)y_0 + \dot{a}_1(\theta)y_1 + \dot{b}_0(\theta)\dot{y} + \dot{b}_1(\theta)\dot{y}_1] + \\ &k[a_0(\theta)y_0 + a_1(\theta)y_1 + b_0(\theta)\dot{y}_0 + b_1(\theta)\dot{y}_1] = \\ &f(\theta\Delta t)\end{aligned} \tag{6}$$

式(6)进一步变形为：

$$\begin{aligned}&[m\ddot{a}_1(\theta) + c\dot{a}_1(\theta) + ka_1(\theta)]y_1 + [m\ddot{b}_1(\theta) + c\dot{b}_1(\theta) + \\ &kb_1(\theta)]\dot{y}_1 = -[m\ddot{a}_0(\theta) + c\dot{a}_0(\theta) + ka_0(\theta)]y_0 - \\ &[m\ddot{b}_0(\theta) + c\dot{b}_0(\theta) + kb_0(\theta)]\dot{y}_0 + f(\theta\Delta t)\end{aligned} \tag{7}$$

记

$$d(\theta) = m\ddot{a}_1(\theta) + c\dot{a}_1(\theta) + ka_1(\theta) \tag{8a}$$

$$e(\theta) = m\ddot{b}_1(\theta) + c\dot{b}_1(\theta) + kb_1(\theta) \tag{8b}$$

$$r(\theta) = -[m\ddot{a}_0(\theta) + c\dot{a}_0(\theta) + ka_0(\theta)] \tag{8c}$$

$$s(\theta) = -[m\ddot{b}_0(\theta) + c\dot{b}_0(\theta) + kb_0(\theta)] \tag{8d}$$

则式(7)可以简记成：

$$d(\theta)y_1 + e(\theta)\dot{y}_1 = r(\theta)y_0 + s(\theta)\dot{y}_0 + f(\theta\Delta t) \tag{8e}$$

式(8e)左项是在时间$[0,\Delta t]$步长时间终值的未知位移y_1、未知速度$\dot{y}_1$，式(8e)右项是在时间$[0,\Delta t]$步长时间初值的已知位移y_0、已知速度$\dot{y}_0$和荷载$f(\theta\Delta t)$。有两个未知数，一个方程，难以求解。但注意到参数θ可以取不同的数值，这里分别取$\theta=\theta_1, \theta=\theta_2, \theta_1\neq\theta_2$代入式(8e)，得：

$$d(\theta_1)y_1 + e(\theta_1)\dot{y}_1 = r(\theta_1)y_0 + s(\theta_1)\dot{y}_0 + f(\theta_1\Delta t) \tag{9a}$$

$$d(\theta_2)y_1 + e(\theta_2)\dot{y}_1 = r(\theta_2)y_0 + s(\theta_2)\dot{y}_0 + f(\theta_2\Delta t) \tag{9b}$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} d(\theta_1) & e(\theta_1) \\ d(\theta_2) & e(\theta_2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r(\theta_1) & s(\theta_1) \\ r(\theta_2) & s(\theta_2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f(\theta_1\Delta t) \\ f(\theta_2\Delta t) \end{Bmatrix} \tag{10}$$

式(10)有两个未知数：末时刻的位移 y_1，末时刻的速度 $\dot{y}_1$，共有两个方程，能够求解。

对于多自由度振动的基本方程：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{Y}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}(t) \tag{11}$$

类似地有如下递推方程：

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{M}\ddot{a}_1(\theta)+\boldsymbol{C}\dot{a}_1(\theta)+\boldsymbol{K}a_1(\theta)]\boldsymbol{Y}_1+\\&\quad[\boldsymbol{M}\ddot{b}_1(\theta)+\boldsymbol{C}\dot{b}_1(\theta)+\boldsymbol{K}b_1(\theta)]\dot{\boldsymbol{Y}}_1=\\&\quad-[\boldsymbol{M}\ddot{a}_0(\theta)+\boldsymbol{C}\dot{a}_0(\theta)+\boldsymbol{K}a_0(\theta)]\boldsymbol{Y}_0-\\&\quad[\boldsymbol{M}\ddot{b}_0(\theta)+\boldsymbol{C}\dot{b}_0(\theta)+\boldsymbol{K}b_0(\theta)]\dot{\boldsymbol{Y}}_0+\boldsymbol{F}(\theta\Delta t)\end{aligned} \tag{12}$$

记

$$\boldsymbol{D}(\theta)=\boldsymbol{M}\ddot{a}_1(\theta)+\boldsymbol{C}\dot{a}_1(\theta)+\boldsymbol{K}a_1(\theta) \tag{13a}$$

$$\boldsymbol{E}(\theta)=\boldsymbol{M}\ddot{b}_1(\theta)+\boldsymbol{C}\dot{b}_1(\theta)+\boldsymbol{K}b_1(\theta) \tag{13b}$$

$$\boldsymbol{R}(\theta)=-[\boldsymbol{M}\ddot{a}_0(\theta)+\boldsymbol{C}\dot{a}_0(\theta)+\boldsymbol{K}a_0(\theta)] \tag{13c}$$

$$\boldsymbol{S}(\theta)=-[\boldsymbol{M}\ddot{b}_0(\theta)+\boldsymbol{C}\dot{b}_0(\theta)+\boldsymbol{K}b_0(\theta)] \tag{13d}$$

则式(13)可以简记成：

$$\boldsymbol{D}(\theta)\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{E}(\theta)\dot{\boldsymbol{Y}}_1=\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{Y}_0+\boldsymbol{S}(\theta)\dot{\boldsymbol{Y}}_0+\boldsymbol{F}(\theta\Delta t) \tag{14}$$

这里分别取 $\theta=\theta_1$、$\theta=\theta_2$、$\theta_1\neq\theta_2$ 代入式(14)，得：

$$\boldsymbol{D}(\theta_1)\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{E}(\theta_1)\dot{\boldsymbol{Y}}_1=\boldsymbol{R}(\theta_1)\boldsymbol{Y}_0+\boldsymbol{S}(\theta_1)\dot{\boldsymbol{Y}}_0+\boldsymbol{F}(\theta_1\Delta t) \tag{15a}$$

$$\boldsymbol{D}(\theta_2)\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{E}(\theta_2)\dot{\boldsymbol{Y}}_1=\boldsymbol{R}(\theta_2)\boldsymbol{Y}_0+\boldsymbol{S}(\theta_2)\dot{\boldsymbol{Y}}_0+\boldsymbol{F}(\theta_2\Delta t) \tag{15b}$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}(\theta_1) & \boldsymbol{E}(\theta_1)\\ \boldsymbol{D}(\theta_2) & \boldsymbol{E}(\theta_2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \dot{\boldsymbol{Y}}_1\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}(\theta_1) & \boldsymbol{S}(\theta_1)\\ \boldsymbol{R}(\theta_2) & \boldsymbol{S}(\theta_2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{Y}_0\\ \dot{\boldsymbol{Y}}_0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}(\theta_1\Delta t)\\ \boldsymbol{F}(\theta_2\Delta t)\end{Bmatrix} \tag{16}$$

式(10)、式(16)即是导出的最后递推方程。

2 计算步骤

1) 初始计算。

a) 形成刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$、阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和质量矩阵 $\boldsymbol{M}$。

b) 确定初值 $\boldsymbol{Y}_0$、$\dot{\boldsymbol{Y}}_0$，取参数 θ_1、θ_2，按式(2)、式(3)、式(4)分别计算 θ_1、θ_2 时：

$a_0(t)$，$\dot{a}_0(t)$，$\ddot{a}_0(t)$，$a_1(t)$，$\dot{a}_1(t)$，$\ddot{a}_1(t)$，$b_0(t)$，$\dot{b}_0(t)$，$\ddot{b}_0(t)$，$b_1(t)$，$\dot{b}_1(t)$，$\ddot{b}_1(t)$。

2) 计算时间步长 $[t_i, t_i+\Delta t]$ 终时刻未知位移 $\boldsymbol{Y}_1$。

a) 按式(13)计算矩阵

$\boldsymbol{D}(\theta_1),\boldsymbol{E}(\theta_1),\boldsymbol{R}(\theta_1),\boldsymbol{S}(\theta_1),\boldsymbol{F}(\theta_1\Delta t)$,
$\boldsymbol{D}(\theta_2),\boldsymbol{E}(\theta_2),\boldsymbol{R}(\theta_2),\boldsymbol{S}(\theta_2),\boldsymbol{F}(\theta_2\Delta t)$。

b) 形成扩大矩阵

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}(\theta_1) & \boldsymbol{E}(\theta_1)\\ \boldsymbol{D}(\theta_2) & \boldsymbol{E}(\theta_2)\end{bmatrix}、\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}(\theta_1) & \boldsymbol{S}(\theta_1)\\ \boldsymbol{R}(\theta_2) & \boldsymbol{S}(\theta_2)\end{bmatrix}、\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}(t_i+\theta_1\Delta t)\\ \boldsymbol{F}(t_i+\theta_2\Delta t)\end{Bmatrix}$$

c) 按式(16)解方程求出 $\boldsymbol{Y}_1$、$\dot{\boldsymbol{Y}}_1$。

3) 求下一时间步长的初值 $\boldsymbol{Y}_0$、$\dot{\boldsymbol{Y}}_0$。

a) 将上一时间步长求出的 $\boldsymbol{Y}_1$、$\dot{\boldsymbol{Y}}_1$ 作为下一时间步长的初位移 $\boldsymbol{Y}_0$、$\dot{\boldsymbol{Y}}_0$。

b) 按第 2)步子步 c)求出下一时间步终值。

3 稳定性分析

对于只有初位移、初速度参与的单自由度逐步积分，其最终的递推公式可以归结为[14]：

$$\begin{Bmatrix}y_1\\ \dot{y}_1\end{Bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{Bmatrix}y_0\\ \dot{y}_0\end{Bmatrix}+\boldsymbol{F} \tag{17}$$

其中：$\boldsymbol{A}$ 为传递矩阵；$\boldsymbol{F}$ 为荷载矩阵。如传递矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径 $\rho(A)\leqslant 1$，则算法是稳定的。由式(10)易知单自由度振动的传递矩阵为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}d(\theta_1) & e(\theta_1)\\ d(\theta_2) & e(\theta_2)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}r(\theta_1) & s(\theta_1)\\ r(\theta_2) & s(\theta_2)\end{bmatrix} \tag{18}$$

对于 $\ddot{y}+\varpi^2 y=f(t)$，容易算出传递矩阵为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\dfrac{6(1-2\theta_1)}{\Delta t^2}+\omega^2(1+2\theta_1)(\theta_1-1)^2 & \dfrac{6\theta_1-2}{\Delta t}+\omega^2(\theta_1-1)\theta_1^2\Delta t\\ \dfrac{6(1-2\theta_2)}{\Delta t^2}+\omega^2(1+2\theta_2)(\theta_2-1)^2 & \dfrac{6\theta_2-2}{\Delta t}+\omega^2(\theta_2-1)\theta_2^2\Delta t\end{bmatrix}^{-1}\times$$
$$(-1)\begin{bmatrix}\dfrac{6(2\theta_1-1)}{\Delta t^2}+\omega^2\dfrac{6\theta_1(\theta_1-1)}{\Delta t} & \dfrac{6\theta_1-4}{\Delta t}+\omega^2\theta_1(\theta_1-1)^2\Delta t\\ \dfrac{6(2\theta_2-1)}{\Delta t^2}+\omega^2\dfrac{6\theta_2(\theta_2-1)}{\Delta t} & \dfrac{6\theta_2-4}{\Delta t}+\omega^2\theta_2(\theta_2-1)^2\Delta t\end{bmatrix} \tag{19}$$

4 算例

4.1 算例 1

假如振动方程的圆频率 $\omega^2=5.0$，试用具体的例子用双参数法讨论其稳定性问题。

首先假定 θ_1、θ_2 均为已知，这样只需确定 Δt 的取值范围。这里，我们假定 $\theta_1=0.2,\theta_2=1.2$，将 θ_1、θ_2、ω^2 代入式(19)，并求其特征多项式，特征

多项式可以表示为：

$$a_0(\Delta t)x^2 + a_1(\Delta t)x + a_2(\Delta t) = 0 \tag{20}$$

若特征值的模满足[15]：

$$|x| \leqslant 1 \tag{21}$$

则计算格式是稳定的。

利用 z 变换，令 $x = \dfrac{(1+z)}{(1-z)}$ 代入式(20)化简并整理：

$$c_0(\Delta t)z^2 + c_1 z(\Delta t) + c_2(\Delta t) = 0 \tag{22}$$

满足式(21)的必要条件等价于式(22)中 z 的实数部分非负。按照 Routh-Hurwitz 条件[16]，对于多项式方程式(22)若满足式(23)则 z 的实数部分非负。

$$c_0(\Delta t) > 0 \tag{23a}$$

$$c_1(\Delta t) \geqslant 0 \tag{23b}$$

$$\det\begin{bmatrix} c_1(\Delta t) & 0 \\ c_0(\Delta t) & c_2(\Delta t) \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{23c}$$

将 $\omega^2 = 5.0,\ \theta_1 = 0.2,\ \theta_2 = 1.2$ 代入得：

$$c_0(\Delta t) = \Delta t^4 + 0.47297\Delta t^2 + 4.0541\Delta t + 8.1081 \tag{24a}$$

$$c_1(\Delta t) = 2.2162\Delta t^4 + 1.9459\Delta t^3 + 6.7703\Delta t^2 - 2.4324\Delta t \tag{24b}$$

$$c_2(\Delta t) = 1.2162\Delta t^4 - 1.9459\Delta t^3 + 11.459\Delta t^2 - 1.6216\Delta t \tag{24c}$$

要使式(24)满足式(23)需得 $\Delta t \geqslant 0.4$ 。

从上述算例我们知道，该方法的稳定区域很复杂，取不同的 θ_1、θ_2、ω^2 将有不同的稳定条件。因此如何有效确定 θ 仍然有待进一步研究。

4.2　算例 2

某单自由度的动力学方程为：

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = \sin 2t$$

初始条件是 $y_{|t=0} = 57/65$， $\dot{y}_{|t=0} = 2/65$ 。

该方程的解析解是：

$$y = \mathrm{e}^{-2t}(\cos t + 2\sin t) - \frac{1}{65}(8\cos 2t - \sin 2t)$$

取时间步长 t=0.2， θ 分别取 θ_1=0.5,θ_2=0.8； θ_1=0.4,θ_2=0.9；$\theta_1 = 1.0, \theta_2 = 0.6$；$\theta_1 = 1.2, \theta_2 = 0.7$ 。计算结果见表 1。从表 1 可以看出本法与解析解比较吻合。不同的 θ 值对计算结果有影响，但总体说来，计算结果是令人满意的。

表 1　不同 θ 值计算结果与解析解的比较

Table 1　The example result comparison with analytic solve at different θ

方法	$1\Delta t$	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$
解析解	0.8159	0.6891	0.5585	0.4493	0.3661	0.3031	0.2513	0.2023	0.1506	0.0945
$\theta_1 = 0.5, \theta_2 = 0.8$	0.8175	0.6924	0.5629	0.4540	0.3705	0.3069	0.2542	0.2043	0.1518	0.0952
$\theta_1 = 0.4, \theta_2 = 0.9$	0.8169	0.6910	0.5608	0.4517	0.3683	0.3049	0.2526	0.2032	0.1511	0.0948
$\theta_1 = 1.0, \theta_2 = 0.6$	0.8184	0.6941	0.5650	0.4562	0.3725	0.3085	0.2554	0.2051	0.1523	0.0954
$\theta_1 = 1.2, \theta_2 = 0.7$	0.8197	0.6969	0.5687	0.4601	0.3761	0.3115	0.2577	0.2067	0.1533	0.0959

表 2　不同 θ 值计算结果与 Newmark 法、Wilson 法、精细积分法计算结果的比较

Table 2　The example result comparison with those of Newmark, Wilson, precision integration at different θ

方法	位移	$1\Delta t$	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$
Newmark	y_1	0.0067	0.0504	0.1890	0.4850	0.9610	1.5800	2.2300	2.7600	3.0000	2.8500
	y_2	0.3640	1.3500	2.6900	4.0000	4.9500	5.3400	5.1300	4.4800	3.6400	2.9000
Wilson	y_1	0.0061	0.0525	0.1960	0.4900	0.9520	1.5400	2.1600	2.6700	2.9200	2.8200
	y_2	0.3660	1.3400	2.6400	3.9200	4.8800	5.3100	5.1800	4.6100	3.8200	3.0600
精细积分	y_1	0.0030	0.0380	0.1760	0.4860	0.9960	1.6570	2.3380	2.8610	3.0520	2.8060
	y_2	0.3820	1.4120	2.7810	4.0940	4.9960	5.2910	4.9860	4.2770	3.4570	2.8060
$\theta_1 = 0.5, \theta_2 = 0.8$	y_1	0.0007	0.0342	0.1725	0.4889	1.0094	1.6806	2.3665	2.8828	3.0548	2.7814
	y_2	0.3894	1.4309	2.8076	4.1154	4.9997	5.2679	4.9408	4.2249	3.4203	2.8012
$\theta_1 = 0.4, \theta_2 = 0.9$	y_1	0.0013	0.0357	0.1741	0.4882	1.0043	1.6704	2.3535	2.8717	3.0515	2.7905
	y_2	0.3871	1.4235	2.7961	4.1048	4.9964	5.2762	4.9602	4.2490	3.4394	2.8064
$\theta_1 = 1.0, \theta_2 = 0.6$	y_1	−0.0005	0.0321	0.1717	0.4924	1.0194	1.6958	2.3823	2.8918	3.0501	2.7599
	y_2	0.3948	1.4429	2.8220	4.1244	4.9958	5.2489	4.9119	4.1971	3.4061	2.8083
$\theta_1 = 1.2, \theta_2 = 0.7$	y_1	−0.0021	0.0291	0.1708	0.4986	1.0359	1.7209	2.4079	2.9060	3.0414	2.7233
	y_2	0.4019	1.4605	2.8439	4.1381	4.9894	5.2182	4.8651	4.1524	3.3837	2.8206

4.3 **算例 3**

某二自由度的动力学方程为：

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{y}_1\\\ddot{y}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & -2\\-2 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\10\end{Bmatrix}$$

初始条件 $\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\end{Bmatrix}_{t=0}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}\dot{y}_1\\\dot{y}_2\end{Bmatrix}_{t=0}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$

取时间步长 t=0.28，θ 分别取 $\theta_1=0.5,\theta_2=0.8$；$\theta_1=0.4,\theta_2=0.9$；$\theta_1=1.0,\theta_2=0.6$；$\theta_1=1.2,\theta_2=0.7$。计算结果见表 2。从表 2 可以看出本法计算结果与精细积分法计算结果较吻合，与 Newmark 法、Wilson 法计算结果接近，而精细积分法计算结果与解析解一致。因此，本法计算精度优于 Newmark 法、Wilson 法，略逊于精细积分法[14]。数值算例表明本方法是简便而有效的。

5 结论

基于上述分析和计算，得出如下结论：

(1) 本文构造出了求解结构动力学响应的一种新的逐步积分法。通过采用三次 Hermite 插值，不同于以前的逐步积分法采用单一参数 θ 来控制精度和稳定性，而是采用双参数 θ_1、θ_2 建立平衡递推方程，进而控制精度和稳定性。这无疑是有益的尝试，具有启示意义。

(2) 数值算例表明，本方法比 Newmark 法、Wilson 法有更好的计算精度，比较接近精细积分法，因而本方法具有良好的可靠的。

(3) 本方法具有自起步、无需中间计算环节、计算精度较高的特点。

(4) 本算法稳定性复杂，与取不同的 θ 相关，如何定性分析不同的 θ 值对计算精度和稳定的影响仍然值得进一步研究。

参考文献：

[1] Newmark N M. A method of computation for structural dynamics [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1959, 85(3): 249－260.

[2] Wilson E L. Nonlinear dynamic analysis of complex structures [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1973, 1(3): 241－252.

[3] Hulbert G M, Chung J. A new time integration algorithm for structural dynamics: The explicit generalized-α method [C]. Proc. 1992 ASME Winter Ann. Meeting in the Symp. on New Methods in Transient Analysis. PVP-Vol.246/AMD-Vol. 1992, 143: 73－78.

[4] 袁晓彬. 时变结构动力学及时变有限元法研究[D]. 上海: 同济大学, 2001.
Yuan Xiaobin. Study on time-varying structural dynamics and time-varying FEM [D]. Shanghai: Tongji University, 2001. (in Chinese)

[5] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, 32(2): 131－136.
Zhong Wanxie. On precise time-integration method for structural dynamics [J]. Journal of Dalian University of Technology, 1994, 32(2): 131－136. (in Chinese)

[6] 刘铁林. 动力问题的非时间步参数时间有限元法及弹性波传播数值模拟的格子法[D]. 大连: 大连理工大学, 2000.
Liu Tielin. No-time-step-parameter time finite element methods and grid methods for numerical modeling of elastic wave propagation in dynamics [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2000. (in Chinese)

[7] 徐洪香. 基于 Gurtin 变分原理计算动力学问题逐步递推格式的推导[J]. 辽宁工学院学报, 2002, 20(6): 44－48.
Xu Hongxiang. Deriving of step-by-step integration formula for dynamic analysis based on Gurtin variational principle [J]. Journal of Liaoning Institute of Technology, 2002, 20(6): 44－48. (in Chinese)

[8] Born M, Ghiringhelli L, lanz M, Mantegazza P, Merlini T. Dynamic response of mechanical systems by a weak Hamiltonian formulation [J]. Computer & Structures, 1985, 20: 495－508.

[9] 黄川. 时域协调的动力时空有限元算法及其应用[D]. 成都: 四川大学, 2003.
Huang Chuan. Algorithm and applications of time-continuous space-time finite element method for dynamics [D]. Chengdu: Sichuan University, 2003. (in Chinese)

[10] 邢向华, 张雄, 陆明万. 基于 Galerkin 法弱形式的时间积分法[J]. 工程力学, 2006, 23(7): 8－12.
Xing Xianghua, Zhang Xiong, Lu Mingwan. A time integration method based on the weak form Galerkin method [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(7): 8－12. (in Chinese)

[11] 于开平. 时变结构动力学数值方法及其模态参数识别方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2000.
Yu Kaiping. Study on time-varying structural dynamics numerical algorithm and modal parameter identification method [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2000. (in Chinese)

[12] Hulbert G M. Time finite element methods for structure dynamics [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, 33: 307－331.

[13] 张光澄. 实用数值分析[M]. 成都: 四川大学出版社, 2004.
Zhang Guangcheng. Applied mathematics analysis [M]. Chengdu: Sichuan University Press, 2004. (in Chinese)

[14] 陈玲莉. 工程结构动力分析数值方法[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2006.
Chen Lingli. Numerical method in structural dynamics [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2006. (in Chinese)

[15] 王焕定, 马赫, 曾森. 结构动力学逐步积分算法稳定性讨论[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2008, 40(10): 1513－1516.
Wang Huanding, Ma He, Zeng Sen. A discussion to the stability of step-by-step integration methods in some textbooks of structure dynamics [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2008, 40(10): 1513－1516. (in Chinese)

[16] Routh E J. A treatise on the stability of a given state or motion [M]. London: Macmillian, 1977.