

文章编号: 1000-4750(2016)Suppl-0150-06

# 单梁法分析曲线梁桥的适用条件研究

焦驰宇<sup>1,4</sup>, 张羽<sup>2</sup>, 龙佩恒<sup>3</sup>, 侯苏伟<sup>3</sup>

(1. 北京建筑大学北京市城市交通基础设施建设工程技术研究中心, 北京 100044; 2. 北京新奥通城房地产开发有限公司, 北京 101100;  
3. 北京建筑大学首都世界城市顺畅交通协同创新中心, 北京 100044; 4. 同济大学土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

**摘要:** 现有曲线梁建模分析方法主要为单梁法、梁格法以及实体法三种, 已有研究表明: 单梁法的精确度不高, 但由于其建模速度快、计算效率高而倍受设计青睐, 故确定单梁法分析曲线梁桥的适用条件(即在何种条件下单梁法具有满足工程设计的足够精度)具有重要的现实意义。该文以结构应力作为主要衡量指标、圆心角作为主要判别手段开展研究。以京开路立交A匝道桥为工程原型, 建立大量不同跨径 $L$ 、桥面宽度 $B$ 、圆心角 $\theta$ 的梁格、单梁模型, 对比单梁法与梁格法所得应力, 以10%的误差率作为控制指标, 反算出临界圆心角, 并拟合得到单梁法的适用条件。该文研究成果对曲线梁桥的结构设计分析具有重要意义。

**关键词:** 曲线梁桥; 单梁法; 适用条件; 弯扭耦合; 临界圆心角

中图分类号: U448.42 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2015.05.S013

## APPLICABLE CONDITION RESEARCH OF SINGLE-BEAM METHOD IN CURVED GIRDER BRIDGE

JIAO Chi-yu<sup>1,4</sup>, ZHANG Yu<sup>2</sup>, LONG Pei-heng<sup>3</sup>, HOU Su-wei<sup>3</sup>

(1. BUCEA, Beijing Urban Transportation Infrastructure Engineering Technology Research Center, Beijing 100044, China;  
2. Beijing Inno-Olympic Real Estate Development Co. Ltd, Beijing 101100, China;  
3. BUCEA, Beijing Collaborative Innovation Center for Metropolitan Transportation, Beijing 100044, China;  
4. State Key Laboratory of Disaster Prevention in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** There are three kinds of methods for modeling and analyzing the existing curved girder bridges. They are single-beam method, grillage method and entity method. According to the previous literature, the single-beam method is not so accurate, but it is generally popular because of its higher speed in analyzing and higher efficiency in calculating. So the research of the single-beam method has practical significance. Central angle is the key factor to determine whether the curved girder bridge can be analyzed with the single-beam method. According to A ramp bridge of Jingkai overpass, several models of curved girder bridges with different spans, deck widths and central angles are built and compared using the grillage method and the single-beam method in this paper. Then by taking 10% as the control index, the applicable condition of the single-beam method is obtained.

**Key words:** curved girder bridge; single-beam method; applicable condition; coupling of bending and torsion; critical central angle

收稿日期: 2015-05-03; 修改日期: 2016-04-01

基金项目: 建设部研究开发项目(2010-k3-47); 国家青年自然科学基金项目(51308027); 北京市教委科技计划面上项目(KM201310016007); 北京市属高等学校创新团队建设与教师职业发展计划项目(IDHT20130512); 土木工程防灾国家重点实验室开放基金项目(SLDRCE-14-02); 北京市自然科学基金面上项目(8162012)

通讯作者: 龙佩恒(1964—), 男, 北京人, 教授, 博士, 主要从事桥梁抗震、桥梁技术状况评定及维修加固研究(E-mail: phjz@163.com).

作者简介: 焦驰宇(1980—), 男, 陕西人, 副教授, 博士, 主要从事桥梁抗震研究(E-mail: jcy@bucea.edu.cn);

张羽(1990—), 男, 北京人, 硕士, 主要从事桥梁抗震、工程建设项目管理研究(E-mail: 1126017429@qq.com);

侯苏伟(1984—), 男, 河南人, 讲师, 博士, 主要从事钢桥疲劳性能、碳纤维在桥梁中应用的研究(E-mail: housuwei@bucea.edu.cn).

随着我国现代化建设的飞速发展,交通运输业的蓬勃兴起,高速公路贯穿我国东西南北,城市立交桥和高架桥也日益增多。桥梁建设进入了一个迅速发展的新阶段,曲线桥梁因其因地制宜,满足服从交通线路,且造型优美、结构线条平顺、轻快、流畅,给人以美的感受,故各种类型的曲线桥梁在高速公路和城市立交中的应用越来越广泛<sup>[1-4]</sup>,对曲线梁桥的设计和研究也越来越深入。

有限元方法是曲线桥梁力学规律分析的主要手段,但采用何种方法探讨曲线桥受力显得极为重要。一般可采用三种建模方法进行其建模分析,分别为单梁法、梁格法、实体模型法。参考以往文献[5-12]可知梁格法较单梁法考虑问题更加全面且受力准确,单梁法所得内力与实际情况有一定的误差。但在实际桥梁设计时,单梁法由于建立模型速度较快、计算效率较高而倍受青睐。因此,有必要研究单梁法分析曲线梁桥的适用条件。以往文献研究表明单跨圆心角对曲线桥主梁弯扭耦合效应影响较大,以此作为单梁法适用条件的指标可能较为适宜,故确定适宜的圆心角成为衡量能否采用单梁法分析曲线桥问题的关键所在。本文拟在此方面展开工作,旨在得到适合单梁法分析曲线梁桥的临界圆心角,从而确定单梁法的适用条件,为曲线桥的有限元分析提供推荐性标准。

## 1 建模方法概述

### 1.1 单梁法

单梁法,又称“脊骨梁”法,在有限元建模分析中,将曲线箱梁模拟为集中主梁形心处的梁单元,并假设受力后该桥梁横截面保持平面(即不发生翘曲变形),且截面形状保持不变。理论与建模均较为简单,易于计算。但该方法不能考虑桥梁横截面的畸变、翘曲<sup>[6]</sup>。单梁模型如图1所示。

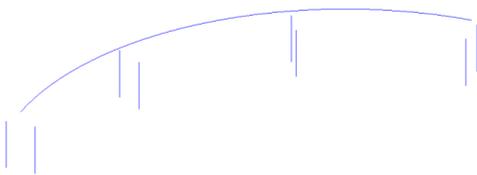


图1 单梁模型

Fig.1 Single-beam model

### 1.2 梁格法

梁格法的主要思路是将桥梁上部结构用一个等效的平面梁格或空间结构来模拟,由纵向与横向

梁格相交而成。梁格模型如图2所示,其中,实际桥梁的每一部分抗弯、抗扭刚度集中于其对应的梁格中。即梁格的纵、横向刚度分别可代表实际结构的纵、横向弯曲刚度与扭转刚度。故梁格模型和原型结构具有相同的变形与受力<sup>[7-13]</sup>。

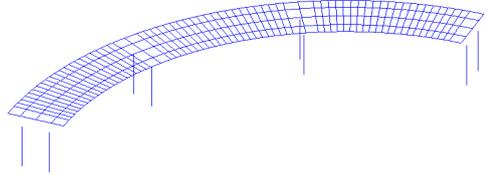


图2 梁格模型

Fig.2 Grillage model

### 1.3 实体法

实体法又称为实体单元法,其主要是把整体结构分割为不同大小、不同类型的正四面体或六面体单元,如: ABAQUS、MIDAS/FEA等。本文选用MIDAS/FEA建立实体单元模型,实体法目的是将整体结构分割成足够大小的单元,使得模型能够近似的满足精确解。参照以往的文献[6],实体法分析弯箱梁桥所得内力最符合实际情况。

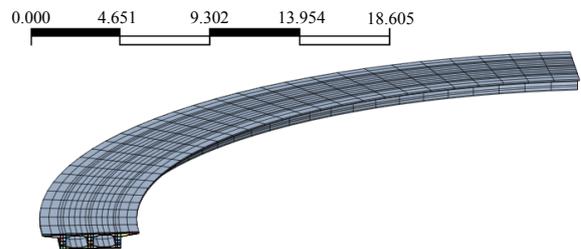


图3 FEA 实体模型

Fig.3 Entity model

## 2 适用条件研究

文献[14]进行一定研究表明:在已知曲线桥梁半径 $R$ 、单跨跨径 $L$ 以及桥面宽度 $B$ 的条件下,以梁格法、单梁法相比较的计算结果作为基准值,以10%的误差率作为控制指标,从而反算出适用于单梁法的临界半径值。但它仅考虑了单箱单室梁(而一般曲线梁多采用单箱多室梁)以及中跨独柱墩的情况,该文献拓宽了笔者的思路,笔者选择以更直观反映曲线梁特性的圆心角作为标准,拟得到单梁法的适用条件。本文以文献[5]的曲线梁桥为工程实例,修改其参数,建立大量不同跨径 $L$ 、桥面宽度 $B$ 、圆心角 $\theta$ 的曲线桥梁格、单梁模型,保持梁截面形式(单箱双室)以及支撑形式(桥墩采用双柱墩)不变,为得到更符合实际情况的结论,笔者适当加宽

了文献[14]单跨跨径以及桥面宽度的取值范围，因城市预应力混凝土曲线梁桥的往往由应力控制桥梁设计，故采取应力作为精度判别标准。以梁格法、单梁法相比较的应力计算结果作为基准值，从而反算出适合单梁法模拟的临界圆心角值。具体研究思路见图4所示。

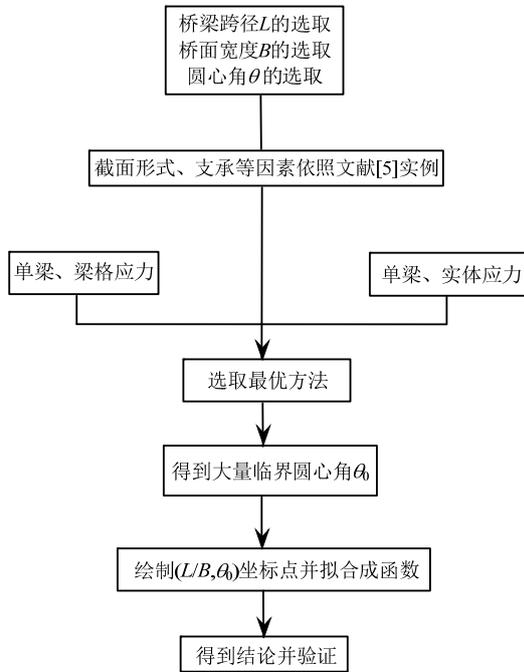


图4 研究思路

Fig.4 Research idea

2.1 工程概况

以文献[5]中的工程实例作为本论文的原型，具体如下：京开路某立交匝道桥位于北京市五环路，为25 m+25 m+25 m三跨连续曲线梁桥(曲率半径为48 m)，其截面采用单箱双室箱梁，梁高1.5 m，宽度为9 m，顶板厚0.22 m，底板厚0.18 m。两边腹板厚0.5 m，中腹板厚1.0 m，各跨跨中设有横隔板。曲线桥横截面如图5所示。

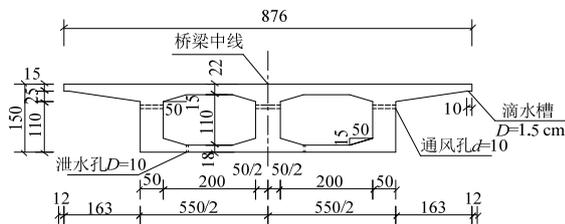


图5 横截面尺寸图 /cm

Fig.5 Cross section size

2.2 影响因素的选取

将连续曲线梁桥单跨跨径  $L$ 、桥面宽度  $B$ 、圆心角  $\theta$  按一定取值范围进行组合。结构形式选取3等跨连续梁桥(其中，跨径15 m~65 m 每隔5 m 取

值，桥面宽度7 m~15 m 每隔1 m 取值，圆心角从0°~45°每隔5°取值)如表1所示。

表1 曲线桥梁影响因素组合表

Table 1 Combination of influencing factors on curve bridge

模型编号	单跨跨径 $L/m$	桥面宽度 $B/m$	圆心角 $\theta(^{\circ})$
1	15	7	0~45
2	15	8	0~45
3	15	9	0~45
4	15	10	0~45
5	15	11	0~45
6	15	12	0~45
7	15	13	0~45
8	15	14	0~45
9	15	15	0~45
10	20	7	0~45
11	20	8	0~45
12	20	9	0~45
13	20	10	0~45
—	—	—	—
17	20	14	0~45
18	20	15	0~45
19	25	7	0~45
20	25	8	0~45
21	25	9	0~45
—	—	—	—
26	25	14	0~45
27	25	15	0~45
—	—	—	—
37	35	7	0~45
38	35	8	0~45
—	—	—	—
55	50	7	0~45
56	50	8	0~45
57	50	9	0~45
—	—	—	—
99	65	15	0~45

2.3 实际分析方法的选取

笔者以曲线桥梁跨径  $L=25$  m，桥面宽度  $B=9$  m，改变圆心角数值(0°~45°)为例，分别采用以下两种分析方法，得到临界圆心角。

方法1：用MIDAS/Civil分别以单梁法、梁格法建立曲线桥模型，计算分析提出最大拉(压)应力，进而将单梁法与梁格法所得应力进行比较，因工程分析中经常以90%作为近似保证率，故将两者应力相差10%时候所得的圆心角作为临界圆心角<sup>[14]</sup>。

计算过程见表2所示。

该表仅给出误差接近10%时前后所对应的两个圆心角，通过插值法得到误差率为10%时的临界圆心角。

表 2 不同半径单梁与梁格法应力对比

Table 2 Internal force of different radius between single-beam method and grillage method

圆心角 $\theta(^{\circ})$	模型	主拉应力 $\sigma_1/\text{MPa}$	主压应力 $\sigma_2/\text{MPa}$	误差 $\xi/(%)$
10°	单梁	5.59	-5.34	14.92
	梁格	6.57	-6.26	
5°	单梁	5.13	-6.50	9.2
	梁格	5.59	-7.16	

故可算得当连续曲线梁桥单跨跨径  $L=25\text{ m}$ , 桥面宽度为  $B=9\text{ m}$  时, 梁格、单梁法应力误差率为 10% 的桥梁临界圆心角:

$$\theta = -\frac{14.92 - 10}{14.92 - 9.2} \times (20 - 10) + 20 = 15.69^{\circ}$$

方法 2: 用 MIDAS/Civil 建立单梁法、MIDAS/FEA 建立实体法模型, 计算分析提出最大拉(压)应力, 进而将单梁法与实体法所得应力进行比较, 将两者应力相差 10% 时候所得的圆心角作为临界圆心角。

计算过程见表 3 所示。

表 3 不同半径实体法与单梁法应力对比

Table 3 Internal force of different radius between FEA and single-beam method

圆心角 $\theta(^{\circ})$	模型	主拉应力 $\sigma_1/\text{MPa}$	主压应力 $\sigma_2/\text{MPa}$	误差 $\xi/(%)$
10°	单梁	5.59	-5.34	20.71
	FEA	7.05	-6.75	
5°	单梁	5.13	-6.50	7.80
	FEA	5.43	-7.05	

该表仅给出误差接近 10% 时前后所对应的两个圆心角, 通过插值法得到误差率为 10% 时的临界圆心角。

故可算得当连续曲线梁桥跨径  $L=25\text{ m}$ , 桥面宽度为  $B=9\text{ m}$  时, 实体法、单梁法应力误差率为 10% 时桥梁的临界圆心角:

$$\theta = -\frac{20.71 - 10}{20.71 - 7.8} \times (20 - 15) + 20 = 15.85^{\circ}$$

可知单梁、梁格求得的曲线梁临界圆心角为  $15.69^{\circ}$ , 与单梁、实体 FEA 模型所得圆心角  $15.85^{\circ}$  数据较吻合, 说明梁格、单梁求解临界圆心角方法合理。由于梁格法建模较实体法简便快捷, 故本节采用方法 1 梁格、单梁法求解临界圆心角。

### 2.4 圆心角选取规律

建立表 1 所示模型, 采用方法 1 得到曲线桥不同跨径、桥面宽度组合下的临界圆心角, 整理数据如表 4 所示。

表 4 不同  $L/B$  的单跨临界圆心角值

Table 4 Critical central angle of biggest span in different ratios between span and width

单跨跨径 $L/\text{m}$	桥面宽度 $B/\text{m}$	圆心角 $\theta(^{\circ})$			
		单跨跨径 $L/\text{m}$	桥面宽度 $B/\text{m}$	圆心角 $\theta(^{\circ})$	
15	7	15.90	45	7	5.24
15	8	17.06	45	8	7.29
15	9	18.07	45	9	7.34
15	10	22.49	45	10	8.22
15	11	24.30	45	11	11.81
15	12	30.69	45	12	13.93
15	13	34.56	45	13	14.47
15	14	37.57	45	14	16.04
15	15	38.97	45	15	20.57
20	7	13.90	50	7	3.66
20	8	14.47	50	8	5.15
20	9	16.03	50	9	7.47
20	10	19.58	50	10	7.91
20	11	21.57	50	11	8.69
20	12	29.90	50	12	11.72
20	13	31.90	50	13	13.26
20	14	34.13	50	14	15.32
20	15	35.88	50	15	17.37
25	7	13.16	55	7	3.49
25	8	14.07	55	8	4.51
25	9	15.69	55	9	6.30
25	10	17.74	55	10	7.70
25	11	18.49	55	11	8.47
25	12	24.36	55	12	10.43
25	13	27.31	55	13	12.53
25	14	26.41	55	14	13.11
25	15	30.57	55	15	15.70
30	7	11.37	60	7	2.99
30	8	13.63	60	8	4.08
30	9	15.63	60	9	6.20
30	10	16.26	60	10	6.90
30	11	16.77	60	11	7.22
30	12	18.14	60	12	8.04
30	13	18.79	60	13	10.70
30	14	21.45	60	14	12.33
30	15	27.37	60	15	14.79
35	7	8.37	65	7	2.35
35	8	10.32	65	8	3.79
35	9	10.70	65	9	5.92
35	10	11.37	65	10	6.23
35	11	15.87	65	11	6.97
35	12	17.12	65	12	8.86
35	13	18.04	65	13	9.37
35	14	19.89	65	14	11.25
35	15	24.66	65	15	11.96
40	7	6.36	—	—	—
40	8	8.48	—	—	—
40	9	8.60	—	—	—

(续表)

单跨跨径 <i>L</i> /m	桥面宽度 <i>B</i> /m	圆心角 $\theta(^{\circ})$	单跨跨径 <i>L</i> /m	桥面宽度 <i>B</i> /m	圆心角 $\theta(^{\circ})$
40	10	9.09	—	—	—
40	11	10.45	—	—	—
40	12	15.68	—	—	—
40	13	17.79	—	—	—
40	14	19.65	—	—	—
40	15	21.63	—	—	—

以单跨跨径 *L*/桥面宽度 *B*(跨宽比)为横坐标, 临界圆心角为纵坐标, 将表中所有数据得到的坐标点绘制成如图 6 所示, 用 OriginPro7.5 进行公式的拟合, 拟合精度  $R^2=0.90$ 。

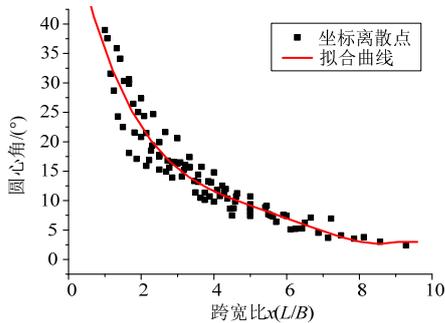


图 6 拟合曲线图

Fig.6 Fitting curve

拟合得到函数:

$$\theta(x) = -1.05 + 129.35e^{-x/0.41} + 38.64e^{-x/3.70} \quad (1)$$

式中: *x* 为桥梁的跨宽比(*L*/*B*);  $\theta(x)$ 为单跨临界圆心角函数值。上述函数适用于 3 跨连续梁桥、普通板式橡胶支座、双柱墩的桥梁。当连续梁桥非等跨时, 跨径 *L* 选取最大跨数值。

上述函数所得到的圆心角  $\theta(x)$ 是保证单梁与梁格法所算内力误差在 10%以内的临界圆心角数值。故可知当 *x*(*L*/*B*)恒定时, 曲线桥单跨圆心角在  $0^{\circ} \sim \theta(x)$  范围内可用单梁法建模分析, 反之则不适用, 具体表示如图 7 所示。

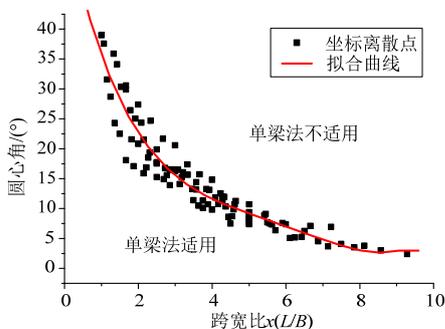


图 7 单梁法适用性示意图

Fig.7 Applicability schematic diagram of single-beam method

### 2.5 实例验证

以文献[5]中京开路某立交匝道桥为实例, 判断其可否用单梁法计算分析。

京开路某立交匝道桥单跨跨径 25 m, 桥面宽度 9.0 m, 曲率半径为 48 m, 可知连续梁单跨圆心角  $\theta$  为  $29.87^{\circ}$ 。将  $x=L/B=2.854$  代入函数  $\theta(x)$ :

$$\theta(x) = -1.05 + 129.35e^{-x/0.41} + 38.64e^{-x/3.70} = 16.94$$

故  $\theta > \theta(x)$ , 可知该曲线梁并不能用单梁法建模。文献[5]数据表明, 单梁法建模内力的确与实际情况不符, 验证了临界圆心角函数的准确性。

### 3 结论与展望

本文以文献[5]的曲线梁桥为工程实例, 修改其参数, 建立大量不同跨径 *L*、桥面宽度 *B*、圆心角  $\theta$  的曲线桥梁格、单梁模型, 保持梁截面形式(单箱双室)以及支撑形式(桥墩采用双柱墩)不变, 将单梁法与梁格法所得应力进行比较, 以两者应力相差 10% 时所得的圆心角作为临界圆心角, 获取大量的临界圆心角数据, 拟合得到临界圆心角函数, 从而确定了单梁法分析曲线梁桥的适用条件。本文得到结论如下:

- (1) 本文探讨了曲线桥梁有限元分析方法特点。即明确单梁法较梁格、实体法而言, 计算效率高、在一定条件下精度符合要求且更适用于设计。
- (2) 本文探讨了计算临界圆心角的求解方法, 得到梁格法与单梁法的应力比较可替代实体单元法与单梁法的比较, 从而确定单梁法适用条件。
- (3) 本文通过表 4 不同跨径、桥面宽度组合的临界圆心角, 可得: 跨径恒定、宽度越大, 临界圆心角越大; 宽度恒定、跨径越大, 临界圆心角越小。
- (4) 本文得到单梁法分析曲线梁桥的适用条件, 如表 5 所示。

表 5 单梁法适用性判定表

Table 5 Judgement of applicability of single-beam method	
$\theta$	单梁法
$\theta < \theta(x)$	○
$\theta > \theta(x)$	×

注:  $\theta$  为实际连续梁单跨圆心角;  $\theta(x)$ 为单跨临界圆心角; 表中“○”代表适用; “×”代表不适用。

其中,  $\theta(x) = -1.05 + 129.35e^{-x/0.41} + 38.64e^{-x/3.70}$ 。1) *x* 为桥梁的跨宽比(*L*/*B*); 2) 上述函数适用于 3 跨连续梁桥、普通板式橡胶支座、双柱墩的桥梁; 3) 当连续梁桥非等跨时, 跨径 *L* 选取最大跨数值。

本文的研究仍存在以下不足:

- (1) 本文研究对象仅考虑了 3 跨连续梁、普通

板式橡胶支座且中墩支撑形式为双柱墩。

(2) 本文未考虑高墩桥梁对临界圆心角的影响。

(3) 通过以往文献可知影响曲线桥梁静力力学特征的主要因素有: 结构形式、几何要素以及材料要素等。而本文仅考虑了适用于单梁法分析的几何要素条件, 其他因素如结构形式(墩柱形式、主梁形式、连接形式)、材料要素(钢、混凝土)等问题对单梁法模拟曲线梁的影响还有待进一步研究。

#### 参考文献:

- [1] 王金山. 浅述梁格法在连续箱梁桥设计中的应用[J]. 北方交通, 2009(10): 35—37.  
Wang Jinshan. Application of grillage method in design of box girder bridges [J]. North Traffic, 2009(10): 35—37. (in Chinese)
- [2] 刘永刚, 潘盛山. 梁格法的划分对单箱多室梁桥设计的影响[J]. 山东交通学院学报, 2010, 18(2): 48—52.  
Liu Yonggang, Pan Shengshan. The influence of grillage method division of the design of a single multi room box girder bridge [J]. Journal of Shandong Jiaotong University, 2010, 18(2): 48—52. (in Chinese)
- [3] 罗静峰, 田杨. 梁格法在弯箱梁桥结构分析中的应用[J]. 铁道设计标准, 2010(3): 77—78.  
Luo Jingfeng, Tian Yang. The application of grillage method in the analysis of curved box girder bridge structure [J]. Railway Standard Design, 2010(3): 77—78. (in Chinese)
- [4] 张发春, 杨昌正. 梁格法在弯箱梁桥上的分析及应用[J]. 重庆交通大学学报, 2008, 27(1): 13—16.  
Zhang Fachun, Yang Changzheng. The analysis and application of grillage method in the curved box girder bridge structure [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University, 2008, 27(1): 13—16. (in Chinese)
- [5] Jiao Chiyu, Zhang yu. The advantages of the analysis of curved box beam using the grillage method [C]. Asia Pacific Transportation Development Conference, Challenges and Advances in Sustainable Transportation Systems, 2014: 507—514.
- [6] 魏利军. 基于梁格法的曲线箱梁桥弯扭耦合效应研究[D]. 西安: 长安大学, 2011.  
Wei Lijun. Study on lateral torsional coupling effect of curved box girder bridge based on grillage method [D]. Xi'an: Chang'an University, 2011. (in Chinese)
- [7] Jaeger L. G, Bakht B. The grillage analogy in bridge analysis [J]. Canadian Journal of Civil Engineering, 1982, 9(2): 224—235.
- [8] 汉勃利 E C (英). 桥梁上部结构性能[M]. 郭文辉, 译. 北京: 人民交通出版社, 1982: 15—25.  
Hambly E C (English). The performance of upper part of bridge structure [M]. Translated by Guo Wenhui. Beijing: China Communications Press, 1982: 15—25. (in Chinese)
- [9] 王强. 梁格法在连续箱梁中的应用[J]. 城市道桥与防洪, 2011, 8(8): 177—179.  
Wang Qiang. The application of grillage method in the continuous box girder [J]. Urban Road and Bridge and Flood Control, 2011, 8(8): 177—179. (in Chinese)
- [10] 田野. 梁格法在曲线梁桥挠度计算中的应用[J]. 北方交通, 2012(7): 57—60.  
Tian Ye. The application of grillage method in deflection of the curved girder [J]. North Communications, 2012(7): 57—60. (in Chinese)
- [11] 黄剑源. 薄壁结构的扭转分析—曲线梁与斜支箱形梁[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1998: 20—30.  
Huang Jianyuan. Torsion of the thin-walled structure analysis—curve beam and oblique box beam [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1998: 20—30. (in Chinese)
- [12] 戴公连, 李德建. 桥梁结构空间分析设计方法与应用[M]. 北京: 人民交通出版社, 2001: 10—15.  
Dai Gonglian, Li Dejian. Spatial analysis and application of bridge structure [M]. Beijing: China Communications Press, 2001: 10—15. (in Chinese)
- [13] Shreedhar R, Rashmi Kharde. Comparative study of grillage method and finite element method of RCC bridge deck [J]. International Journal of Scientific and Engineering Research, 2013, 4(2): 1—10.
- [14] 郭波. 混凝土曲线梁桥建模分析方法及适用条件研究[D]. 包头: 内蒙古科技大学, 2012.  
Guo Bo. Study of Concrete Curved beam bridge modeling method and applicable conditions [D]. Baotou: Inner Mongolia University of Science and Technology, 2012. (in Chinese)