

文章编号: 1000-4750(2012)Suppl II-0097-04

材料非线性分析的自然单元法

丁道红^{1,2}, 章 青^{1,2}

(1. 河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 江苏, 南京 210098; 2. 河海大学工程力学系, 江苏, 南京 210098)

摘 要: 自然单元法主要是基于给定结点的 Voronoi 图, 利用自然相邻插值进行形函数的构造, 其形函数满足 Kronecker delta 性质, 便于施加本质边界条件, 这使得自然单元法同时兼有有限单元法和无网格法的优点。在材料非线性本构关系的基础上, 推导了考虑材料非线性问题的自然单元法模型。算例表明: 该模型在处理材料非线性问题时, 具有一定的合理性和可行性, 是一种有效的数值方法。

关键词: 自然单元法; 材料非线性; 自然相邻插值; Sibson 插值法; 数值方法

中图分类号: O241.8 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.11.S007

ANALYSIS FOR MATERIAL NONLINEARITY WITH NATURAL ELEMENT METHOD

DING Dao-hong^{1,2}, ZHANG Qing^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China;

2. Department of Engineering Mechanics, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China)

Abstract: Based on the Voronoi diagram of some nodes, the natural element method constructs a shape function by the natural neighbor interpolation, and its shape functions satisfy the Kronecker delta property, which makes it impose essential boundary conditions easily. From the advantages of a natural element method, we can see the natural element method owns the advantages of both finite element and meshless methods. Based on the material nonlinear constitutive relation, we derived the model of the natural element method for the problem of material nonlinearity. The result of numerical example shows that it is rationality and feasibility for the model in dealing with the material nonlinear problem, and it is an effective numerical method for solving the material nonlinear problem.

Key words: natural element method; material nonlinear problem; natural neighbor interpolation; Sibson interpolation method; numerical method

1995 年, Braun 和 Sambridge^[1]基于给定结点的 Voronoi 图, 将自然相邻插值的概念引进到求解偏微分方程中, 从而开创了自然单元法, 使用该方法在求解大变形等问题时不需要重构网格。随后 Sukumar 等^[2-3]对此进行了深入研究, 并将此方法应用到求解固体力学的相关问题中。Unger 等^[4]将此方法应用到裂纹扩展模拟相关的领域。江涛等^[5-11]将此方法应用到厚板弯曲、断裂力学和弹塑

性力学等问题的分析和研究中。丁道红等^[12]对弹塑性自然单元法进行了研究, 并应用该方法对钢管混凝土中混凝土的力学性能进行了分析。卢波^[13]等将此方法应用到岩土工程的数值计算中。曾祥勇等^[14]应用此方法计算了双参数地基上 Kirchhoff 板的弯曲挠度。本文将自然单元法应用到材料非线性问题中, 利用材料非线性本构关系, 建立了可进行材料非线性问题分析的自然单元法模型, 充分利用该方

收稿日期: 2011-05-01; 修改日期: 2011-12-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(10972072, 51179064, 11132003); 国家重点基础研究发展计划资助项目(2007CB714104); 河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室专项基金项目(2009585912)

通讯作者: 章 青(1963—), 男, 安徽人, 教授, 博士, 博导, 从事计算力学和虚拟仿真研究(E-mail: lxzhangqing@hhu.edu.cn).

作者简介: 丁道红(1981—), 男, 江苏人, 博士生, 主要从事自然单元法相关研究(E-mail: ddh@hhu.edu.cn).

法在处理材料非线性问题中不需划分单元网格、精度高、后处理方便、施加本质边界条件容易等优点。

1 形函数计算

自然单元法主要是一种基于给定结点的 Voronoi 图,以自然相邻插值进行形函数构造的数值方法。Voronoi 图的概念可用数学方程进行描述,设 R^n 空间任意 m 个互异的点 $P = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$, 则与其中任意一点 \mathbf{x}_I 对应的 Voronoi 图的定义为:

$$T_I = \{\mathbf{x} \in R^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J), \forall J \neq I\} \quad (1)$$

式中, $d(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_J)$ 为点 \mathbf{x}_I 和点 \mathbf{x}_J 的欧氏距离。

将具有公共边界的 Voronoi 图所对应的结点相连接形成的三角形,称作 Delaunay 三角形,如图 1。

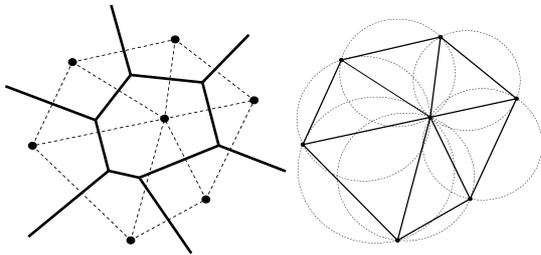


图 1 Voronoi 图及其对应的 Delaunay 三角网

Fig.1 Voronoi diagram and its dual Delaunay tessellation

以 κ 代表勒贝格测度(在一维、二维、三维空间中分别为长度、面积和体积)。设 κ_I 表示 n 维空间结点 \mathbf{x}_I 的 Voronoi 结构的勒贝格测度, κ_{x_I} 表示待插值点 \mathbf{x}' 关于自然邻点 \mathbf{x}_I 的二阶 Voronoi 结构:

$$T_{x_I} = \{\mathbf{x} \in R^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I), \forall I\} \cap \{\mathbf{x} \in R^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J), \forall J \neq I\} \quad (2)$$

的勒贝格测度。根据 Sibson 插值法^[15], 形函数为待插值点 \mathbf{x}' 关于自然邻点 \mathbf{x}_I 的二阶 Voronoi 结构 T_{x_I} 的勒贝格测度 κ_{x_I} 与待插值点 \mathbf{x}' 的一次 Voronoi 结构 T_x 的勒贝格测度 κ_x 之比值, 即:

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \frac{\kappa_{x_I}}{\kappa_x} \quad (3)$$

式(3)对 x_k 的导数为:

$$\phi_{I,k}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa_{x_I,k}(\mathbf{x})\kappa_x - \kappa_{x_I}(\mathbf{x})\kappa_{x,k}}{[\kappa_x]^2} \quad (4)$$

通过式(3), 求解域 Ω 内任一点的位移 \mathbf{u}^e 可由该点所有自然邻点的位移 \mathbf{u}_I 插值求得, 即:

$$\mathbf{u}^e = \sum_{I=1}^n \mathbf{u}_I \phi_I = \Phi \mathbf{u} \quad (5)$$

式中: \mathbf{u}_I 为结点 I 的位移矢量; n 为自然邻点的个数, 由于非自然邻点的插值形函数为 $\phi_I = 0$, 故 n 可

为求解域内结点的总个数; Φ 、 \mathbf{u} 分别为形函数矩阵和结点位移矩阵, 对于二维问题,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad u_n \quad v_n]^T.$$

2 控制方程

设平面问题的求解域为 Ω , 边界为 $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$, Γ_u 、 Γ_t 分别为位移边界和应力边界, 满足 $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$, $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$, 静力平衡方程为:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad i, j = 1, 2 \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (6)$$

边界条件:

$$\begin{cases} u_i = \bar{u}_i, & \mathbf{x} \in \Gamma_u \\ \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i, & \mathbf{x} \in \Gamma_t \end{cases} \quad (7)$$

式中: σ_{ij} 、 b_j 分别为应力和体力; \bar{u}_i 为给定的位移; n_j 为力边界 Γ_t 的外法线方向余弦; \bar{t}_i 为给定的边界力。

根据平衡方程式(6)及边界条件式(7)中力的边界条件, 可得等效积分形式的伽辽金法为:

$$\int_{\Omega} \delta u_i (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i (\sigma_{ij} n_j - \bar{t}_i) d\Gamma = 0 \quad (8)$$

对式(8)进行分部积分, 则有:

$$\int_{\Omega} (\delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}) d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma \quad (9)$$

为便于进行数值计算, 将式(9)改写成矩阵形式, 有:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \Phi^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \Phi^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (10)$$

对于小应变问题, 其应变与位移之间的几何方程为:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (11)$$

式中, \mathbf{B} 为算子:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \phi_{1,x} & 0 & \phi_{2,x} & 0 & \dots & \phi_{n,x} & 0 \\ 0 & \phi_{1,y} & 0 & \phi_{2,y} & \dots & 0 & \phi_{n,y} \\ \phi_{1,y} & \phi_{1,x} & \phi_{2,y} & \phi_{2,x} & \dots & \phi_{n,y} & \phi_{n,x} \end{bmatrix}$$

将几何方程代入式(10), 可得:

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \sigma d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \Phi^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \Phi^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (12)$$

考虑到结点位移变化 $\delta \mathbf{u}$ 的任意性, 可得静态自然单元法模型为:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \sigma d\Omega = \int_{\Omega} \Phi^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \Phi^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (13)$$

对于材料非线性问题, 其应力与应变之间的物

理方程可写成:

$$d\sigma = D(\sigma)d\varepsilon = D(\sigma)Bdu \quad (14)$$

式中, $D(\sigma)$ 为与应力 σ 对应的各向同性材料的弹性矩阵, 对于应力 σ 所对应的弹性模量可用切线弹性模量 E_t 来表示, 则 $D(\sigma)$ 应为以 σ 对应的切线弹性模量 E_t 和泊松比表示的矩阵。

当应力 σ 与 σ_0 相差很小时, 式(14)可写成:

$$\sigma = \sigma_0 + D(\sigma)B(u - u_0) \quad (15)$$

将式(15)代入式(13), 可得:

$$\int_{\Omega} B^T [\sigma_0 + D(\sigma)B(u - u_0)] d\Omega = \int_{\Omega} \Phi^T b d\Omega + \int_{\Gamma_t} \Phi^T \bar{t} d\Gamma \quad (16)$$

$$\int_{\Omega} B^T \sigma_0 d\Omega = \int_{\Omega} \Phi^T b d\Omega + \int_{\Gamma_t} \Phi^T \bar{t}_0 d\Gamma \quad (17)$$

$$\int_{\Omega} B^T D(\sigma)B(u - u_0) d\Omega = \int_{\Gamma_t} \Phi^T (\bar{t} - \bar{t}_0) d\Gamma \quad (18)$$

令 $K = \int_{\Omega} B^T D(\sigma)B d\Omega$ 为总体刚度矩阵, $\Delta F = \int_{\Gamma_t} \Phi^T (\bar{t} - \bar{t}_0) d\Gamma$ 为等效结点力增量矩阵, 则式(18)

可写成:

$$K(u - u_0) = \Delta F \quad (19)$$

3 求解步骤

1) 给出边界力增量, 计算等效结点力增量矩阵 ΔF 。

2) 根据初始应力 σ_0 给出切线弹性模量 E_{t0} 。

3) 计算总体刚度矩阵 K , 通过式(19)、式(15)求得位移增量 Δu 、位移 u 和应力 σ 。

4) 通过应力 σ 给出切线弹性模量 E_t , 若 E_t 与 E_{t0} 相差不大, 则令 $\sigma_0 = \sigma$, 重复步骤 1)~步骤 4), 直到全部边界力增加完毕, 否则, 先判断边界力增量的大小, 当边界力增量较大时, 边界力增量减半, 再重复步骤 1)~步骤 4); 当边界力增量很小时, 令 $\sigma_0 = \sigma$, 边界力增量恢复为初始边界力增量, 重复步骤 1)~步骤 4)。

4 算例

图 2(a)是一受均布荷载作用的悬臂梁, 利用自然单元法对其进行求解, 荷载保持水平方向。梁的基本参数: 长度 $L=10\text{cm}$, 高度 $H=1\text{cm}$, 厚度为 1cm , 本构关系见图 2(c), 其中, $E_1=1.5 \times 10^4 \text{N/cm}^2$, $E_2=0.6 \times 10^4 \text{N/cm}^2$, $\nu = 0.2$, 屈服极限 $\sigma_0 = 0.3\text{MPa}$, 判断

准则采用 Von Mises 准则。结点布置见图 2(b)。

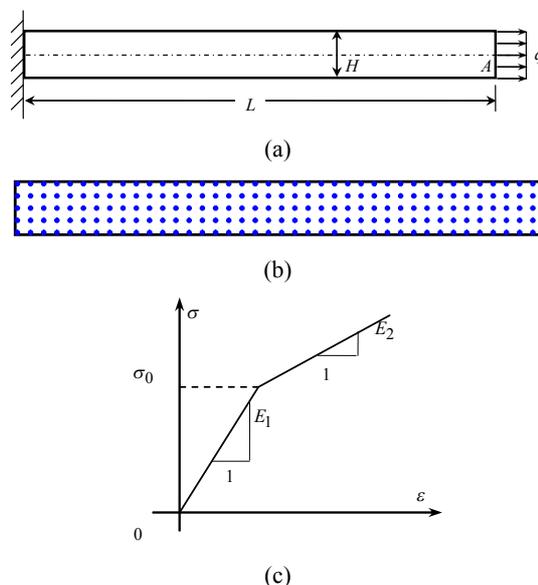


图 2 悬臂梁的材料非线性分析

Fig.2 Material nonlinear analysis for cantilever

A 点水平位移随荷载变化的计算结果见图 3。从图 3 中可见当荷载 $q < 27.5\text{N/cm}$ 或 $q > 35\text{N/cm}$ 时, 其荷载-位移曲线为一直线, 计算所得切线弹性模量分别为 $E = 1.5 \times 10^4 \text{N/cm}^2 = E_1$ 和 $E = 0.6 \times 10^4 \text{N/cm}^2 = E_2$, 荷载 $27.5\text{N/cm} \leq q \leq 35\text{N/cm}$ 时, 其荷载-位移曲线为一曲线, 计算所得切线弹性模量 $E_1 < E < E_2$, 表明在此阶段, 局部点的屈服应力大于屈服极限, 进入屈服阶段, 且随着荷载的增加, 进入屈服阶段的区域在增加。由此可见该模型在分析材料非线性问题时具有一定的合理性和可行性。

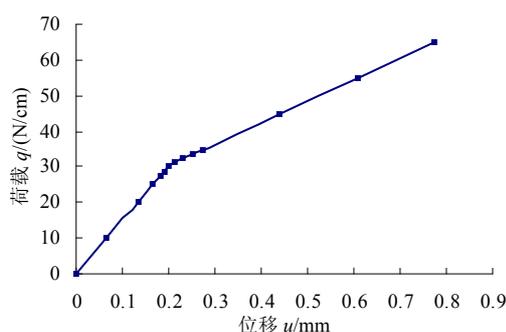


图 3 A 点水平位移-荷载曲线

Fig.3 Curve of horizontal displacement-load for point A

5 结论

本文主要介绍了自然单元法的基本原理, 自然单元法主要是基于一系列点的自然相邻插值法进行形函数的构造, 其对研究域的分析主要是建立在一系列结点的信息之上的, 不需要构建网格, 从而

使得自然单元法具有无网格法的优点。本文借助自然单元法的基本原理,在材料非线性本构关系的基础上建立了材料非线性自然单元法模型,通过算例分析表明,该模型具有一定的合理性和可行性。

参考文献:

- [1] Braun J, Sambridge M. A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids [J]. *Nature*, 1995, 376: 655—660.
- [2] Sukumar N, Moran B, Belytschko T. The natural element method in solid mechanics [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, 43: 839—887.
- [3] Sukumar N. The natural element method in solid mechanics [D]. USA: Northwestern University, 1998.
- [4] Unger Jörg F, Thomas Most, Christian Bucher, et al. Adaptation of the natural element method for crack growth simulations [C]. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS*, 2004: 1—20.
- [5] 江涛. 固体力学自然单元法的若干问题研究[D]. 南京:河海大学, 2009.
Jiang Tao. Study on some problems for natural element method in solid mechanics [D]. Nanjing: Hohai University, 2009. (in Chinese)
- [6] 江涛, 章青. 中厚板弯曲问题的自然单元法[J]. *固体力学学报*, 2009, 30(4): 424—431.
Jiang Tao, Zhang Qing. Natural element method for the bending problem of moderately thick plate [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2009, 30(4): 424—431. (in Chinese)
- [7] 赵昉. 弹塑性断裂力学问题的自然单元法研究[D]. 南京: 河海大学, 2011.
Zhao Yang. Study on some problems for natural element method in elastic-plastic fracture mechanics [D]. Nanjing: Hohai University, 2011. (in Chinese)
- [8] 江涛, 章青. 自然单元法计算裂纹与材料边界问题[J]. *应用力学学报*, 2009, 26(4): 690—694.
Jiang Tao, Zhang Qing. Treatment for crack and material discontinuity with natural element method [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2009, 26(4): 690—694. (in Chinese)
- [9] 江涛, 章青. 单位分解增强自然单元法计算应力强度因子[J]. *工程力学*, 2009, 26(6): 52—57, 64.
Jiang Tao, Zhang Qing. Computing stress intensity factor using partition of unity enriched natural element method [J]. *Engineering Mechanics*, 2009, 26(6): 52—57, 64. (in Chinese)
- [10] 江涛, 章青. 直接增强自然单元法计算应力强度因子[J]. *计算力学学报*, 2010, 27(2): 264—269.
Jiang Tao, Zhang Qing. Computing stress intensity factors by enriched natural element method [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, 27(2): 264—269. (in Chinese)
- [11] 江涛, 章青. 线性强化材料弹塑性分析的自然单元法[J]. *力学季刊*, 2010, 31(2): 288—296.
Jiang Tao, Zhang Qing. Natural element method for elasto-plastic analysis of linear strain hardening material [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2010, 31(2): 288—296. (in Chinese)
- [12] Ding D H, Zhang Q, Luo L Y. Elasto-plastic natural element method (NEM) and its application in numerical experiments of concrete filled steel tubular(CFST) columns [C]. *2011 International Conference on Remote Sensing, Environment and Transportation Engineering (RSETE)*, Nanjing, China, IEEE, 2011, 2: 1160—1163.
- [13] 卢波. 自然单元法的发展及其应用[D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2005.
Lu Bo. Development of the natural element method and its application [D]. Wuhan: Wuhan Institute of Rock and Soil Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, 2005. (in Chinese)
- [14] 曾祥勇, 张鹞, 邓安福. 双参数地基上 Kirchhoff 板计算的无网格自然单元法[J]. *工程力学*, 2008, 25(5): 196—201.
Zeng Xiangyong, Zhang Yao, Deng Anfu. Natural element method for computation of Kirchhoff plate bending on two-parameter soil foundation [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(5): 196—201. (in Chinese)
- [15] Sibson R. A vector identity for the Dirichlet tessellation [J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1980, 87(1): 151—155.