

文章编号: 1000-4750(2008)01-0071-05

轴向碰撞弹性直杆动力后屈曲有限元分析

*郑 波, 王安稳

(海军工程大学理学院力学系, 武汉 430033)

摘 要: 利用显式动力学有限元方法对弹性直杆的动力后屈曲进行了分析; 模拟了弹性直杆轴向碰撞动力屈曲的变形及发展过程。分析中将碰撞杆视为无初始缺陷的理想直杆, 将弹性直杆动力屈曲双特征参数的解答作为非线性动力后屈曲求解的初始条件, 实现了对无缺陷理想直杆的动力后屈曲分析。计算结果与文献中的实验数据获得了很好的一致。计算结果同时也揭示了直杆动力屈曲变形发展的机理, 以及轴向应力波和屈曲变形的相互作用规律。

关键词: 力学; 新方法; 动力屈曲; 应力波; 弹性杆; 有限元

中图分类号: TU311.3 文献标识码: A

FINITE ELEMENT ANALYSES FOR DYNAMIC POSTBUCKLING OF ELASTIC BARS SUBJECTED TO AXIAL IMPACT

*ZHENG Bo, WANG An-wen

(Department of Mechanics, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract: By use of finite element method of explicit dynamics, the dynamic post-buckling of elastic perfect bars subjected to axial high-velocity impact is investigated. The initial dynamic buckling with a small amplitude parameter, given by the twin-characteristic-parameter solution, is employed as the initial condition of the nonlinear dynamic solution. Results obtained in the present study agree well with the experimental data in the reference. The present investigation reveals the mechanism of growth and spread of buckling deformation in the bar and the interaction between the axial stress wave and the buckling deformation during their impacting.

Key words: mechanics; new method; dynamic buckling; stress wave; elastic bar; finite element

轴向动力加载直杆的弹性动力屈曲问题已为不少学者广泛研究^[1-7]。由于运动惯性及应力波效应的作用, 使动力失稳问题变得更为复杂。文献[1]的实验表明: 对于承受高速度轴向碰撞的细长直杆, 在碰撞发生的早期阶段局部屈曲变形出现于碰撞端附近。文献[2]中的高速摄影照片显示: 对于细长杆, 在后屈曲阶段屈曲变形依然局限于碰撞端附近。与静力分叉失稳不同, 动力失稳扰动平衡方程中同时含有临界载荷及惯性指数这两个待定特征参数(静力分叉失稳扰动平衡方程中只含有临界载荷参数)。文

献[3]提出了半无限长直杆受轴向冲击载荷作用的线性分叉解, 认为临界时刻在无穷远端杆的横向位移、转角及内力均为零, 分析中忽略了扰动平衡方程中惯性项。文献[4]求解了有限长直杆中应力传播引起的失稳问题, 认为临界时刻轴向压缩波未波及的部分杆也有屈曲变形发生, 同样在最后的求解过程中略去了扰动平衡方程中惯性项。在文献[5]的分析中同时考虑了轴向压缩波效应及横向惯性效应, 并提出了一个最小模态变形能准则, 对于碰撞端夹支的边界条件, 文献[5]给出了无量纲形式的临界屈曲时

收稿日期: 2006-05-26; 修改日期: 2006-08-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272114)

作者简介: *郑 波(1965—), 男, 湖北人, 博士生, 从事有限元理论及应用研究(E-mail: zbzt@public.wh.hb.cn);

王安稳(1945—), 男, 山东人, 教授, 博导, 从事板壳理论、结构静动力屈曲、复合材料力学等研究(E-mail: wtng4509@public.wh.hb.cn).

间与轴向失稳压力的简单关系式。

文献[8]提出了轴向应力波作用下直杆局部动力屈曲的分叉解,文中提出:在动力屈曲发生的临界时刻 $t=t_{cr}$,无限小的屈曲变形仅局限于轴向应力波所覆盖的部分杆,同时考虑了轴向压缩波效应及横向惯性效应,将失稳特征方程中惯性项的指数参数与临界应力参数同时作为两个待定特征参数来求解,并称之为双特征参数解。由于特征方程中同时含有两个待定特征参数,因此必须寻求边界条件以外的补充定解条件。为此文献[8]根据应力波理论和失稳瞬间能量的转换与守恒,导出了直杆弹性动力分叉失稳的能量准则。应用上述条件文献[8]进一步导出直杆分叉动力失稳时压缩波前所必须满足的临界条件,由此得出动力失稳特征方程的完备定解解答。在文献[9-12]中,文献[8]提出的双特征参数方法被进一步推广到应力波作用下的直杆塑性动力屈曲和圆柱壳的弹性及塑性动力屈曲研究中。

值得注意的是,由应力波引起的动力屈曲问题,失稳是在及其微小的瞬间发生,实验中所观测到的往往是结构的后屈曲信息,为了将理论的分析结果与实验结果进行对比,需要进行动力后屈曲响应的计算。对于这一问题的早期研究大都假设直杆具有某种形式的初始缺陷,广泛采用B-R^[13]运动准则或放大函数法^[14]来研究其在动力载荷作用下被激发的动力行为。由于初始缺陷的不同直接影响到非线性动力方程的求解,对于几何完善细长直杆的动力后屈曲问题,有必要寻求初始缺陷以外的求解方法。本文将文献[8]双特征参数法得出的初始屈曲位移及速度作为初始条件,应用显式有限元方法对无缺陷弹性直杆的动力后屈曲非线性响应进行了数值模拟,着重对弹性直杆的两类轴向碰撞屈曲问题进行了研究。本文的计算结果与文献[1-2]实验中的重要特征数据达到了很好的一致,从而实现了无缺陷理想直杆的动力后屈曲分析。计算结果同时也揭示了动力屈曲变形发展的机理及过程,以及轴向应力波和屈曲变形的相互作用规律。

1 直杆撞击刚性壁时杆中的压缩应力波

如图1所示,长度为 L 的直杆沿轴线方向以速度 v_0 撞击垂直刚性壁,撞击开始后幅值为 σ 压应力波以波速 c 向右传播,时间间隔 t 后,应力波在杆

中传播的距离为 $L_1=ct$ 。根据一维应力波理论,可得碰撞初始阶段杆中的轴向压应力为:

$$\sigma = -\rho c v_0, \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (1)$$

$$\sigma = 0, \quad L_1 < x \leq L \quad (2)$$

其中 ρ 为杆的材料密度。对于图1所示直杆撞击刚性壁,本文的讨论仅限于轴向应力波到达自由端之前的情况。设杆中任一截面的轴向位移 u 向右为正,其分布为:

$$u = -\frac{x}{c} v_0, \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (3)$$

$$u = -v_0 t, \quad L_1 < x \leq L \quad (4)$$

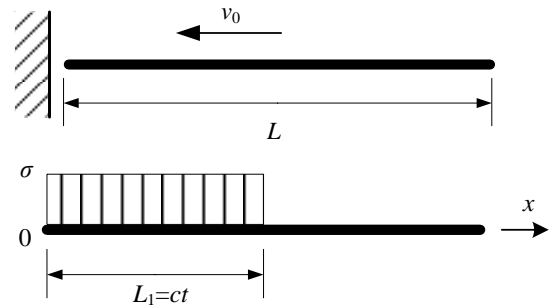


图1 直杆碰撞刚性壁杆中应力波的传播

Fig.1 The propagation of stress wave in bar impacting a rigid wall

2 轴向压应力波下直杆动力屈曲的双特征参数特征值解

对于图1所示直杆撞击刚性壁,当碰撞速度 v_0 足够高时,随着压应力波沿杆轴线向前传播,应力波所覆盖的部分杆将发生局部弹性屈曲,此时产生于碰撞端的压应力波尚未到达杆的自由端。假定碰撞在时刻 $t=0$ 开始,将无限小动力屈曲变形发生的时刻定义为临界屈曲时刻 $t=t_{cr}$,将杆中发生无限小屈曲变形的杆长(即杆中被轴向压应力波所覆盖的那部分杆长),定义为临界屈曲长度: $L_{cr}=c \times t_{cr}$ 。根据文献[8]的计算结果,当压应力波的幅值给定时,一阶动力屈曲模态对应着最短的临界屈曲时间,此时轴向压应力与临界屈曲时间的关系及轴向压应力与临界屈曲长度的关系可分别表示为:

$$\sigma_{cr} = \frac{\Lambda_1 EI}{Ac^2 t_{cr}^2}, \quad L_{cr} = \sqrt{\frac{\Lambda_1 E}{\sigma_{cr}}} \times r \quad (5)$$

式中: Λ_1 为临界应力参数; E 为材料的弹性模量; I 为杆的横截面惯性矩; A 为杆的横截面积; r 为横截面的惯性半径。根据文献[8],对应于一阶动力屈曲模态的初始屈曲绕度 w_0 写成无量纲形式为:

$$\bar{w}_0 = \frac{w_0}{r} = \mu e^{\omega(\tau-1)} Y(\xi) \quad (6)$$

由于上式解答为特征值解答, 式中 μ 为一很小的幅值参数, 式中其余无量纲参数由下列各式定义:

$$\omega = \frac{rA_2}{L_{cr}}, \quad \tau = \frac{t}{t_{cr}}, \quad \xi = \frac{x}{L_{cr}} \quad (7)$$

式中 A_2 是对应于二阶动力屈曲模态的惯性指数参数, 对于杆的碰撞端不同的约束边界条件, A_1 、 A_2 、 $Y(\xi)$ 取值不同。

1) 碰撞端夹支(即碰撞端的横向位移和转动被完全约束, 但容许轴向位移)。

$$A_1 = 10\pi^2, \quad A_2 = 3\pi^2, \\ Y(\xi) = 3\sin(\pi\xi) - \sin(3\pi\xi) \quad (8)$$

2) 碰撞端简支。

$$A_1 = 5\pi^2, \quad A_2 = 2\pi^2, \\ Y(\xi) = 2\sin(\pi\xi) + \sin(2\pi\xi) \quad (9)$$

3 动力后屈曲的控制方程、初始条件及求解

对于图 1 所示碰撞直杆, 动力屈曲发生在碰撞开始的早期阶段, 屈曲变形将随着碰撞过程中轴向应力波的向前传播而快速发展。对于细长直杆, 剪切变形和转动惯性可以忽略, 屈曲后的非线性运动方程为:

$$N_{x,x} - \rho Au_{,tt} = 0 \quad (10)$$

$$M_{x,xx} - (N_x w_{,x})_{,x} + \rho Aw_{,tt} = 0 \quad (11)$$

其中: N_x 为杆中的轴向力; M_x 为横截面上的弯矩; u 、 w 分别为屈曲变形后的轴向及横向位移。当图 1 所示无缺陷碰撞直杆用两节点 Euler-Bernoulli 梁单元离散后, 按照几何非线性有限元理论, 上式可表述为:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + ([K] + [K_\sigma])\{\delta\} = 0 \quad (12)$$

式中: $[K]$ 、 $[K_\sigma]$ 分别为系统整体弹性刚度矩阵和初应力矩阵; $[M]$ 为系统整体质量矩阵; $\{\delta\}$ 为整体节点位移阵。

对方程(12)进行显式有限元动力学积分, 但与一般的非线性动力学积分过程不同, 积分的起始时刻是从 $t = t_{cr}$ 开始, 而不是从时刻 $t = 0$ 开始。积分起始时刻的初始条件(节点位移、速度)由前述双特征参数的解答获得。由方程(3)、方程(4)、方程(6), $t = t_{cr}$ 时刻杆中任一节点的位移、速度分别为:

1) 轴向位移、速度。

$$u = -\frac{x}{c} v_0, \quad u_{,t} = 0, \quad 0 \leq x \leq L_{cr} \quad (13)$$

$$u = -v_0 t_{cr}, \quad u_{,t} = -v_0, \quad L_{cr} < x \leq L \quad (14)$$

2) 横向位移、速度。

$$w = w_0, \quad w_{,t} = w_{0,t}, \quad 0 \leq x \leq L_{cr} \quad (15)$$

$$w = 0, \quad w_{,t} = 0, \quad L_{cr} < x \leq L \quad (16)$$

3) 角位移、角速度。

$$\theta = (w_0)_{,x}, \quad \theta_{,t} = (w_{0,x})_{,t}, \quad 0 \leq x \leq L_{cr} \quad (17)$$

$$\theta = 0, \quad \theta_{,t} = 0, \quad L_{cr} < x \leq L \quad (18)$$

本计算方法可以看成是从初始特征屈曲状态开始的后续屈曲过程的模拟。

4 算例

应用上述方法, 分别对文献[2]中直杆撞击刚性壁实验及文献[1]中重物撞击静止直杆实验进行了计算模拟。

4.1 直杆撞击刚性壁

文献[2]的实验中, 利用拉伸试验机模拟了直杆撞击刚性壁的实验。试件由 6061-T6 铝合金制成, 矩形横截面尺寸为 $b = 12.7\text{mm}$, $h = 0.32\text{mm}$, 长度 $L = 0.726\text{m}$, 弹性模量 $E = 68.5\text{GPa}$, 材料质量密度 $\rho = 2736\text{kg/m}^3$, $\sigma_s = 310\text{MPa}$ 。试件在靠近试验机上夹头的位置预制一切口, 通过调整切口深度控制其拉断时的应力 σ 。试件拉断瞬间一释放波从试件的上端开始以波速 c 向下传播, 波后部分的试件以速度 $V_0 = \sigma/\rho c$ 向下运动, 当释放波传播到下夹头时被反射成压缩波向上传播, 此时下夹头如同一刚性壁, 该实验中由压缩波引起的压应力近似等于拉断时的应力 $\sigma = 276\text{MPa}$ 。试件在不同阶段的屈曲变形由高速摄影机记录下来, 文献[2]中图 2.15 照片显示, 直至后屈曲阶段试件中的屈曲变形仅限于接近下夹头的很短的局部, 实验所测接近下夹头的第一个屈曲半波的波长约等于 11.9mm 。

本文对该实验进行了有限元模拟, 根据文献[2]中的实验装置, 杆的撞击端相当于夹支, 对应于 $\sigma_{cr} = 276\text{MPa}$, 由式(5)计算得临界屈曲长度 $L_{cr} = 14.462\text{mm}$, 临界屈曲时间 $t_{cr} = 2.89 \times 10^{-6}\text{s}$, 按前述显式有限元计算方法, 计算模型为无缺陷直杆, 积分从时刻 t_{cr} 开始, 取式(6)中的幅值参数 $\mu = 0.005$, 积分开始时刻的初始屈曲模态如图 2 所示。计算所得后屈曲阶段不同时刻的无量纲形式

的后屈曲绕度 w/r 沿杆长的变化如图 3、图 4 所示。

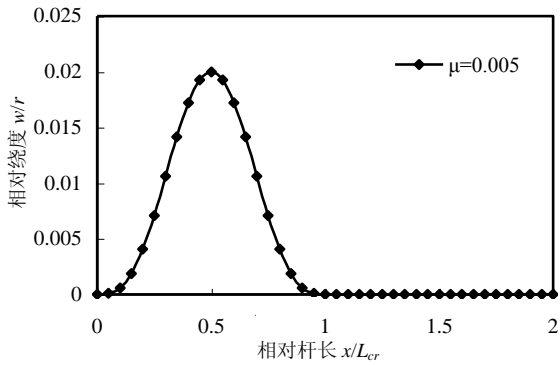


图 2 直杆碰撞刚性壁初始屈曲模式 $\mu = 0.005$

Fig.2 The initial buckling mode of bar impacting a rigid wall $\mu = 0.005$

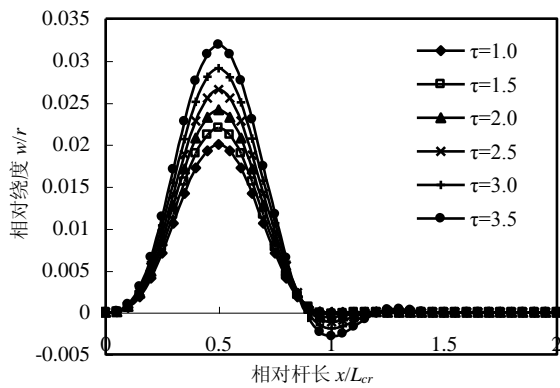


图 3 直杆碰撞刚性壁后屈曲变形 $\mu = 0.005$

Fig.3 The post-buckling deformation of bar impacting a rigid wall $\mu = 0.005$

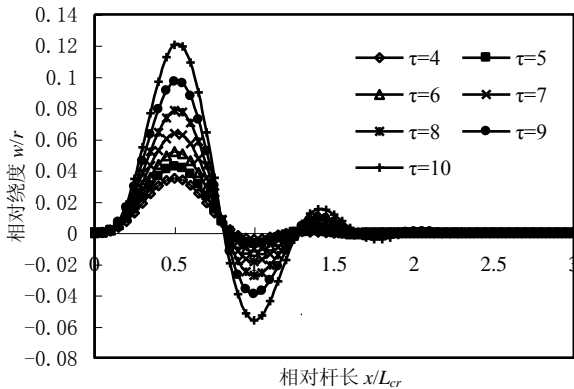


图 4 直杆碰撞刚性壁后屈曲变形 $\mu = 0.005$

Fig.4 The post-buckling deformation of bar impacting a rigid wall $\mu = 0.005$

从图 3 和图 4 中可以看出：在由碰撞引起的轴向压应力波向杆的自由端传播的过程中，接近碰撞端的初始屈曲变形不断向前扩展，由初始具有半个波形的简单模态逐渐发展成一系列的高阶模态。在后屈曲变形过程中，原先对应于初始屈曲模态半波前的位置 $\xi = 1$ ，成为后屈曲高阶模态第 2 个半波的

波谷。后屈曲高阶模态各个半波依次形成后，其在杆中的轴向位置上是基本固定不动的，仅在幅值上不断增加。计算所得靠近碰撞端的第一个半波的长度为： $s = 0.81 \times L_{cr} = 11.7\text{mm}$ ，和文献 [2] 中 11.9mm 的实验值非常接近。

由图 3 和图 4 还可以看出，在后屈曲变形相对较长阶段，屈曲变形仍然局限于碰撞端的局部，变形区域的长度远小于应力波向前传播所覆盖的长度。如在时刻 $\tau = t/t_{cr} = 10$ ，轴向应力波覆盖的长度等于： $10 \times L_{cr} = 144.6\text{mm}$ ，而由图 3 可见，此时屈曲变形部分的长度约为 28.9mm 。计算分析还表明，初始屈曲绕度表达式(6)中的参数 μ 的取值不同，对于特定时刻后屈曲绕度的幅值有相当大的影响，但对后屈曲的波形却影响很小，如图 5 所示，取 $\mu = 0.003$ 时的后屈曲绕度曲线在形状上和 $\mu = 0.005$ 时几乎完全相同，但特定时刻的幅值差别较大，具有较小参数 μ 的初始屈曲模态发展成同样幅值的后屈曲模态需要经过相对较长的时间。

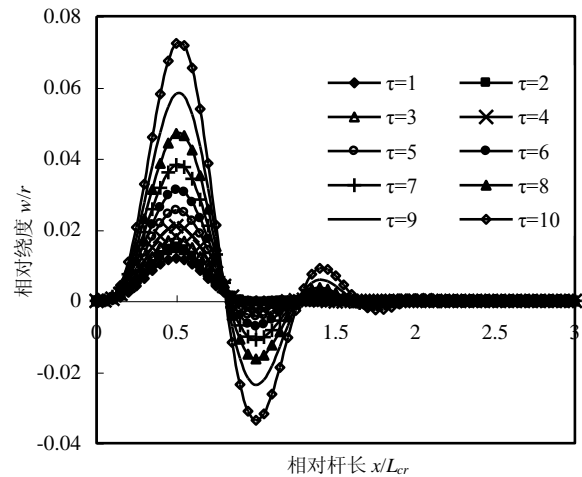


图 5 直杆碰撞刚性壁后屈曲变形 $\mu = 0.003$

Fig.5 The post-buckling deformation of bar impacting a rigid wall $\mu = 0.003$

4.2 重物撞击静止直杆

在文献[1]的实验中，矩形截面的细长直杆一端固定，另一端被一以速度 $V_0 = 6.3\text{m/s}$ 高速运行的重物撞击。试件材料为 Ni-Cr 钢，横截面尺寸为 $b = 8.7\text{mm}$ ， $h = 0.63\text{mm}$ ，弹性模量 $E = 210\text{GPa}$ ，材料质量密度 $\rho = 7778\text{kg/m}^3$ ， $\sigma_s = 310\text{MPa}$ 。试件为预制缺陷杆，具有微小的沿全长半正弦分布的初始绕度。实验中观测到在靠近碰撞端的局部区域试件以高阶模态形式发生屈曲，且屈曲波形与试件的初始绕度无关。

对于该重物撞击固定直杆实验,在撞击过程的初始阶段(压缩波未在固定端反射),可以看成杆以速度 $V_0 = 6.3\text{m/s}$ 撞击刚性壁,根据文献[1]中的实验装置,杆的撞击端相当于简支。计算模型仍为无缺陷直杆,积分从初始屈曲时刻 t_{cr} 开始,取幅值参数 $\mu = 0.005$,计算结果见图 6 所示。从图 6 中可见,随着压缩波在杆中的快速传播,初始简单半波形式的屈曲变形急速演变为对应于不同后屈曲阶段的一系列高阶屈曲模态,但屈曲变形仍然局限于撞击端的局部范围。屈曲波形的发展演变过程与文献[1]中的实验结果基本相近。进一步的计算表明,参数 μ 的取值不同(相当于实验中试件不同的初始绕度)对后屈曲模态的形状几乎没有影响。

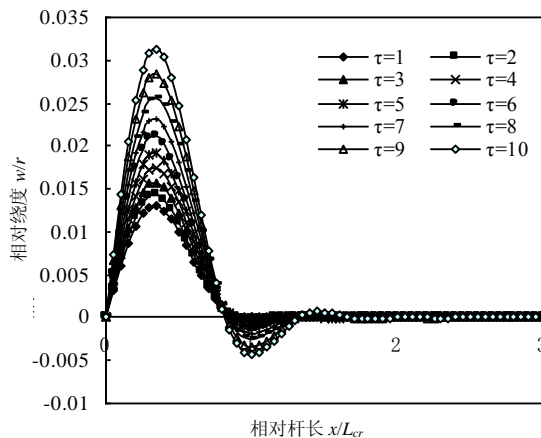


图 6 重物撞击直杆后屈曲变形 $\mu = 0.005$

Fig.6 The post-buckling deformation of bar struck by a mass $\mu = 0.005$

5 结论

对于发生轴向碰撞的细长直杆,动力屈曲变形是以具有简单半个波形的最低阶模态在碰撞端附近开始发生,随着碰撞过程中应力波在杆中的向前传播,快速演变成对应于不同后屈曲阶段的一系列高阶模态,屈曲变形虽向前扩展,但仍然局限于碰撞端附近的局部区域。后屈曲高阶模态依次形成后,屈曲波形在杆的轴向位置上是基本固定不变,仅在幅值上迅速放大。计算所得后屈曲的半波长与实验结果基本一致,后屈曲的演变过程与实验基本相符,验证了本文无缺陷直杆动力后屈曲计算方法的正确性。

参考文献:

[1] Hayashi T, Sano Y. Dynamic buckling of elastic bars (2nd Report) [J]. Bulletin of the JAME, 1972, 15(88): 1176—

1184.
 [2] Lindberg H E, Flornce A L. Dynamic pulse buckling-theory and experiment [M]. Washington: Defence Nuclear Agency, 1987.
 [3] 滕宁钧, 苏先越. 半无限长直杆受轴向冲击荷载作用下的分叉问题[J]. 力学学报, 1989, 21(5): 591—595.
 Teng Ningjun, Su Xianyue. Impact bifurcation of the semi-infinite elastic thin bars [J]. Acta Mechanica Sinica, 1989, 21(5): 591—595. (in Chinese)
 [4] 韩强, 武际可, 张善元, 杨桂通. 直杆中应力传播引起的分叉问题[J]. 力学学报, 1998, 30(4): 417—422.
 Han Qiang, Wu Jike, Zhang Shanyuan, Yang Guitong. Bifurcation caused by the stress wave in column [J]. Acta Mechanica Sinica, 1998, 30(4): 417—422. (in Chinese)
 [5] Tang Liqun, Zhu Xiaoxiang. Impact buckling and postbuckling of slender elastic bars [C]// Proceedings of IUTAM Symposium on Impact Dynamics. Beijing: Peking University Press, 1994, 43—54.
 [6] 朱兆祥. 应力波引起的弹性结构屈曲准则[C]// 余同希, 王大钧. 塑性力学和地球动力学文集. 北京: 北京大学出版社, 1990, 56—70.
 Zhu Zhaoxiang. Criterion of structural elastic buckling caused by stress waves [C]// Yu Xitong, Wang Dajun. Collected Papers on Plasticity and Earth Dynamics. Beijing: Peking University Press, 1990, 56—70. (in Chinese)
 [7] Air-Gur J, Weller T, Singer J. Experimental and theoretical studies of columns under axial impact [J]. International Journal of Solids and Structures, 1982, 18(7): 619—641.
 [8] Wang Anwen, Tian Wenying. Twin-characteristic-parameter solution for dynamic buckling of columns under elastic compression wave [J]. International Journal of Solids Structures, 2002, 39: 861—877.
 [9] Wang Anwen, Tian Wenying. Characteristic-value analysis for plastic dynamic buckling of columns under elastoplastic compression waves [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2003, 38: 615—628.
 [10] Wang Anwen, Tian Wenying. Twin-characteristic-parameter solution of axisymmetric dynamic plastic buckling for cylindrical shells under axial compression waves [J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40: 3157—3175.
 [11] 王安稳. 轴向压应力波下圆柱壳弹性动力失稳的判据与机理[J]. 固体力学学报, 2001, 22(2): 171—185.
 Wang Anwen. Dynamic instability mechanism of cylindrical shells under axial compression wave [J]. Acta Mechanica Sinica, 2001, 22(2): 171—185. (in Chinese)
 [12] Wang A, Tian W. Twin-characteristic-parameters analysis for elastic dynamic buckling of thin cylindrical shells under axial step loading [J]. International Journal of Impact Engineering, 2005, 31: 643—666.
 [13] Budiansky B, Roth R S. Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow [C]// Collected Papers on Instability of Shell Structures. Washington: NASA, NASA TN D-1510, 1962, 597—609.
 [14] Abrahamson G R, Goodier J N. Dynamic flexural buckling of rods within an axial plastic compressive wave [J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, 33(6): 241—247.