

文章编号: 1000-4750(2010)Sup.I-0039-04

有限元线法轴对称单元在稳态温度场分析中的应用

黄其华, 戴元军, 高建岭, *白玉星, 王晓纯

(北方工业大学土木系, 北京 100144)

摘 要: 该文将有限元线法应用于温度场分析, 提出了一种分析温度场的新方法。以轴对称单元为例, 简要地阐述了有限元线法分析温度场的基本步骤。重点介绍了有限元线法分析在分析温度场中的理论推导过程, 得出了常微分方程和对应的边界条件。选用高质量常微分方程组求解器求解所得的常微分方程组, 通过调用子程序 APPSLN 可输出任一点的解答。

关键词: 有限元线法; 温度场; 常微分方程; 变分法; 轴对称单元

中图分类号: O343.6 **文献标识码:** A

THE APPLICATION OF AXISYMMETRIC ELEMENT OF FINITE ELEMENT METHOD OF LINES IN THE ANALYSIS OF THERMAL FIELD

HUANG Qi-hua, DAI Yuan-jun, GAO Jian-ling, BAI Yu-xing, WANG Xiao-chun

(Department of Architectural Engineering, North China University of Technology, Beijing 100144, China)

Abstract: Finite Element Method Of Lines is used in the analysis of thermal field in this paper. Using axisymmetric element, the application of Finite Element Method Of Lines in the analysis of thermal field is illustrated. This paper presents the theoretical derivation for the application of Finite Element Method Of Lines, and obtains the ordinary differential equations and corresponding boundary conditions. High quality ordinary differential equations solver is selected to solve the ordinary differential equations. The temperature of an arbitrary point can be obtained by calling subroutine APPSLN.

Key words: finite element method of lines; thermal field; ordinary differential equation; calculus of variations; axisymmetric element

有限元线法^[1-2](简称: FEMOL——Finite Element Method of Lines)是一种以常微分方程求解器^[3-4]的半解析分析方法, 目前已经成功的应用于固体力学领域, 并取得了令人满意的效果。但是在温度场的分析中, 尚未涉及。多年来, 我校以土壤源热泵地下热交换器温度场分析为背景, 一直致力于有限元线法在温度场分析中的应用研究。由于地下热交换器垂直埋管系统周围温度场是轴对称分布, 所以

选用轴对称单元能够很好地解决问题, 并使问题尽可能简化。通过分析地下埋管周围的土壤温度场, 能够更加合理地设计地下埋管埋深、数量及间距, 有利于土壤源热泵的实际运行, 提高系统的性能系数及土壤源热泵的经济性, 降低设备的初投资。

在运用有限元线法求解温度场时, 取结线温度作为基本未知函数, 在两条结线之间对温度进行线性插值, 然后利用泛函取极值的条件得出问题的控

收稿日期: 2009-03-22; 修改日期: 2010-01-06

作者简介: 黄其华(1985—), 男, 江西人, 硕士, 主要从事有限元计算研究(E-mail: huangqihua@126.com);

戴元军(1983—), 男, 江苏人, 硕士, 主要从事有限元计算研究(E-mail: dyjdargon@yahoo.com.cn);

高建岭(1963—), 男, 山东人, 教授, 博士, 从事结构工程方向的教学和研究(E-mail: gjlncut@126.com);

*白玉星(1973—), 男, 山西人, 副教授, 学士, 从事钢结构方向的教学和研究(E-mail: byx@263.net);

王晓纯(1954—), 男, 辽宁人, 教授, 博士, 博导, 中国有色金属学会常务理事, 从事工程力学的教学和研究(E-mail: wxch@ncut.edu.cn).

制微分方程组及相应的边界条件，最后利用高质量的常微分方程组求解器 COLSYS 求解，从而得到温度场的温度函数。

1 轴对称稳态温度场的变分问题

1.1 温度场基本理论^[5]

1.1.1 稳态温度场

$$T = T(x, y, z, t)$$

1.1.2 傅里叶导热定律

$$q = -k\nabla T$$

式中： q 为热流密度； k 传热系数； ∇T 为温度梯度：

$$\nabla T \equiv i \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z}$$

根据能量守恒定律建立方程，经过高斯定理及数学推导可得到三维导热方程：

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

式中： \dot{q} 内热源体积流量； ρ 为密度； c 比热容； t 为时间。

1.2 微分方程的提法

本文采用轴对称单元，分析无内热源稳态温度场。其对应的微分方程形式为：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_r = \alpha(T - T_f) \Big|_r \end{cases} \quad (1)$$

式中： r 为旋转体的半径； x 为旋转体的对称中心轴（见图 1）。

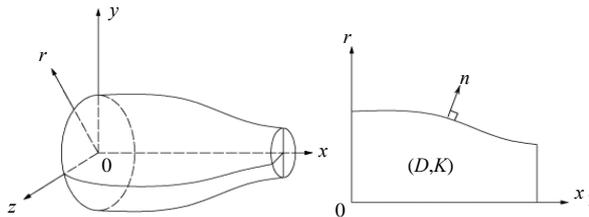


图 1 轴对称温度场

Fig.1 Axisymmetrical thermal field

数学上已经证明，式(1)对应的泛函为：

$$J[T(x, r)] = \iint_D \frac{kr}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \right] dxdr + \int_r \alpha \left(\frac{1}{2} T^2 - T_f T \right) r ds \quad (2)$$

2 有限元线法的单元分析

2.1 单元划分和 FEMOL 温度场的离散

图 2 表示一种可能的用 FEMOL 矩形单元进行离散化^[6]的网格。

1, 2, 3, ..., 12 表示结点的整体编码；

11, 12, 21, 22 表示结点在单元中的局部编码；

(1), (2), (3), ..., (6) 表示结线的整体编码；

(1), (2) 表示结线在单元中的局部编码；

①, ②, ..., ⑤ 表示单元编码；

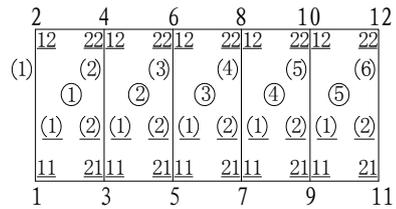


图 2 FEMOL 离散化

Fig.2 Discretization of FEMOL

在 FEMOL 离散化中，结点由该点的坐标确定；结线由起始结点和终止结点确定，例如结点 5(起始结点)和结点 6(终止结点)确定了结线(3)；单元由起始结线、终止结线、以及第一端边和第二端边共同确定。例如，结线(3)(起始结线)和结线(4)(终止结线)以及第一端边 5，边 7 和第二端边 6，边 8 共同确定了单元③。

划分单元时应注意使热流密度位于结点上，温度边界条件位于结线上，不同边界条件的交接点要注意设置结点。热流密度有突变的点或线要注意设置结点或结线、端边。

2.2 温度插值函数

插值函数又叫试样函数或分段函数，本文采用线形插值^[7]，线性插值的示意图如图 3 所示。

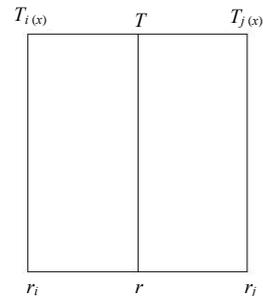


图 3 插值函数的形式

Fig.3 Formalisation of interpolating function

第 i 个结点的温度为 T_i 第 j 个结点的温度为 T_j

T_j , 那么在直线 ij 上任一点的温度 T 是在 T_i 和 T_j 间线形变化, 因此, 结点 i 和结点 j 之间的温度插值函数^[8]为:

$$T(x, r) = (N_i, N_j) \begin{pmatrix} T_i(x) \\ T_j(x) \end{pmatrix} = N_i T_i + N_j T_j$$

式中: $N_i = \frac{r_j - r}{r_j - r_i}$, $N_j = \frac{r - r_i}{r_j - r_i}$.

2.3 $r \times x$ 单元的有限元线法模型

图 4 为有限元线法轴对称单元分析示意图, 设:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} (N_1^2 r) dr; \quad B = \int_{r_1}^{r_2} (N_2^2 r) dr;$$

$$C = \int_{r_1}^{r_2} (2N_1 N_2 r) dr; \quad D = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{(r_2 - r_1)^2} dr;$$

$$M = \int_{r_1}^{r_2} r N_1 dr; \quad N = \int_{r_1}^{r_2} r N_2 dr;$$

$$T(x, r) = (N_1 \quad N_2) \begin{pmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{pmatrix} = N_1 T_1 + N_2 T_2;$$

$$N_1 = \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}, \quad N_2 = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1},$$

$$J[T(x, r)] = \iint_D \frac{kr}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \right] dx dr + \int_r \alpha \left(\frac{1}{2} T^2 - T_f T \right) r ds$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = N_1 T_1' + N_2 T_2'; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{r_2 - r_1} T_1 + \frac{1}{r_2 - r_1} T_2.$$

对泛函取变分得到常微分方程及边界条件:

常微分方程为:

$$\begin{cases} kAT_1'' + \frac{1}{2}kCT_2'' - (kD - \alpha r_1)T_1 + kDT_2 - \alpha T_f r_1 = 0 \\ \frac{1}{2}kCT_1'' + kBT_2'' - (kD + \alpha r_2)T_2 + kDT_1 + \alpha T_f r_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

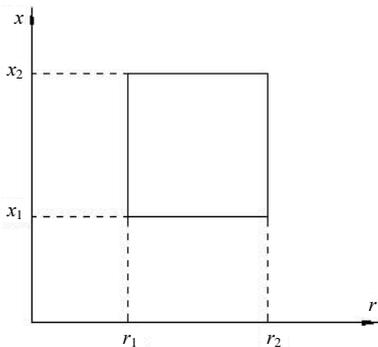


图 4 轴对称单元

Fig.4 Axisymmetric element

用矩阵形式表示为:

$$\begin{pmatrix} -kA & -\frac{1}{2}kC \\ -\frac{1}{2}kC & -kB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1'' \\ T_2'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kD - \alpha r_1 & -kD \\ -kD & kD + \alpha r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha T_f r_1 \\ -\alpha T_f r_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

边界条件为:

$$\begin{cases} \left(kAT_1' + \frac{k}{2}CT_2' - \alpha AT_1 - \frac{1}{2}\alpha CT_2 + \alpha MT_f \right) \delta T_1 + \\ \left(kBT_2' + \frac{k}{2}CT_1' - \alpha BT_2 - \frac{1}{2}\alpha CT_1 + \alpha NT_f \right) \delta T_2 \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} \end{cases} \quad (5)$$

$x = x_1$ 时有:

$$\begin{cases} 2AT_1' + CT_2' - \alpha AT_1 - \frac{1}{2}\alpha CT_2 + \alpha MT_f = 0 \\ 2BT_2' + CT_1' - \alpha BT_2 - \frac{1}{2}\alpha CT_1 + \alpha NT_f = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$x = x_2$ 时有:

$$\begin{cases} 2AT_1' + CT_2' - \alpha AT_1 - \frac{1}{2}\alpha CT_2 + \alpha MT_f = 0 \\ 2BT_2' + CT_1' - \alpha BT_2 - \frac{1}{2}\alpha CT_1 + \alpha NT_f = 0 \end{cases} \quad (7)$$

写成矩阵形式为:

$$\begin{pmatrix} kA & \frac{k}{2}C \\ \frac{k}{2}C & kB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1' \\ T_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha A & -\frac{1}{2}\alpha C \\ -\frac{1}{2}\alpha C & -\alpha B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha MT_f \\ \alpha NT_f \end{pmatrix} = 0 \quad (8)$$

3 有限元线法的程序系统

本文采用的常微分方程求解器为 CLOSYS。

COLSYS 是一个公开发表的求解常微分方程边值问题^[9-10]的通用程序, 程序共含有约 4000 条 FORTRAN 语句。

COLSYS 采用高斯配点法进行求解, 样条高斯配点法具有坚实的理论基础及有效的数值算法, 再加上配点网格自适应性调节技术的实现, 使 COLSYS 成为高效实用, 方便可靠的 ODE 求解器。

3.1 COLSYS^[11]特点和功能

1) 允许混合阶数 ODE; 相比之下, 其它 ODE 软件大都需要使用者将 ODE 体系化为一阶 ODE 体

系后再求解。

2) 采用高斯配点, 解答的精度高; 同时, 不加任何处理便可对含有奇异项的方程组直接求解。

3) 具有可靠的误差估计, 误差重分布以及配点网格自适应性调节等功能以满足用户预先指定的误差限。

4) 非线性问题求解功能较强。

5) 容纳多点边界条件; 即边界条件不必定义在区间的两 endpoints 上, 可以定义在区间内部。

6) 解函数及其各阶导数是连续的, 因此可得到任一点的解值。

3.2 COLSYS 的使用方法

COLSYS 以子程序的形式由用户调用, 调用时用户需要:

1) 提供某些参数, 如每个子区间的配点数, 初始网格的单元数, 加以误差限的解函数的个数及误差限值, 初始网格划分, 非线性问题的初始解的提供形式, 非线性问题是否是敏感型等等。

2) 编制 5 个子程序:

a) FSUB——提供 ODE 右端项 $F_n(*)$;

程序开头为: SUBROUTINE FSUB(X, Z, F);

其中, $X \in [ALEFT, ARIGHT]$;

$$Z(U(X)) = (Z(1), \dots, Z(MSTAR));$$

$$F(X, Z(U(X))) = (F_1, \dots, F_{NCOMP})^T;$$

b) DFSUB——提供 $F_n(*)$ 的雅克比矩阵;

程序开头为: SUBROUTINE DFSUB(X, Z, DF);

其中, X, Z 同 FSUB;

$$DF(I, J) = DFI / DJ, \quad I = 1, \dots, NCOMP; \\ J = 1, \dots, MSTAR;$$

c) GSUB——提供第 i 个边界条件 $G_i(*)$;

程序开头为: SUBROUTINE GSUB(I, Z, G);

其中, Z 同上;

$$G(X, Z(U(X))) = G_i(ZETA(I), Z(U(ZETA(I))));$$

$$1 \leq I \leq MSTAR;$$

d) DGSUB——提供 $G_i(*)$ 的雅克比矩阵;

程序开头为: SUBROUTINE DGSUB(I, Z, DG);

其中, I, Z 同上;

$$DG(I, J) = DGI / DGJ, \quad J = 1, \dots, MSTAR;$$

e) SOLUTN——提供非线性问题的初始解;

程序开头为: SUBROUTINE SOLUTN(X, Z, DMVAL);

此程序只有在 IPAR(9)=1 时才能用到;

求解完之后, 用户可调用子程序 APPSLN 输出任一点的解答。

4 算例

有无限长圆环形柱体, 剖面如图 5 所示, 厚度为 3m, 导热系数 $\kappa = 1.162 / (\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C}))$, 一侧介质温度 $T_{f1} = 100^\circ\text{C}$, 另一侧介质温度 $T_{f2} = 0^\circ\text{C}$, 介质对柱体的热传递系数 $\alpha = 23.24 / (\text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}))$, 离散化为 5 个单元, 计算所得结果和解析解对比如表 1。

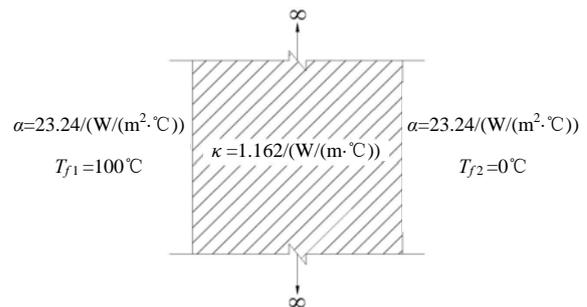


图 5 轴对称单元剖面图

Fig.5 Section plan of axisymmetric element

表 1 计算所得结果及解析解的对比

Table 1 Comparison of results and analytic solutions

r 轴坐标/m	1.0	1.6	2.2	2.8	3.4	4.0
解析解/ $^\circ\text{C}$ ^[12]	100.00	89.06424	67.93186	37.40308	15.09894	0.00
计算结果/ $^\circ\text{C}$	100.00390	89.06196	67.93011	37.40372	15.09959	0.00146

5 结论

有限单元法^[12]早已应用于分析传热学问题中。有线元法在固体力学中的应用已经比较成熟。本文首次将有限元线法引入到传热学中。以轴对称单元为例, 通过单元分析、整体分析, 得出了常微分方程和边界条件, 最后编程进行计算。通过算例可以看出, 有限元线法计算精度较高, 可以应用于温度场分析。

参考文献:

- [1] 高建岭. 结构分析的有限元线法[D]. 北京: 清华大学, 1991.
Gao Jianling. Finite element method of lines in structural analysis [D]. Beijing: Tsinghua University, 1991. (in Chinese)
- [2] 袁骥. 计算力学的有限元线法[J]. 力学进展, 1992, 22(2): 208—216.
Yuan Si. Finite Element Method Of Lines in computation mechanics [J]. Proceedings of Mechanics, 1992, 22(2): 208—216. (in Chinese)

(参考文献[3]—[12]转第 47 页)

参考文献:

- [1] 王新敏. 空间桁架大位移问题的有限元分析[J]. 工程力学, 1997, 14(4): 98—103.
Wang Xinmin. The finite element analysis for large deflection of space trusses [J]. Engineering Mechanics, 1997, 14(4): 98—103. (in Chinese)
- [2] Crisfield M A. Non-linear finite element analysis of solids and structures [M]. New York: Wiley, 1991.
- [3] 郭乙术, 陶伟明, 庄苗. 线性与非线性有限元及其应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2003.
Guo Yishu, Tao Weiming, Zhuang Miao. Linear and nonlinear finite element method and its application [M]. Beijing: Mechanical Industry Press, 2003. (in Chinese)
- [4] Bonet J, wood R D. Nonlinear continuum mechanics for element analysis [M]. New York: Cambridge University Press, 1997.
- [5] 宋天霞, 邹时智, 杨文兵. 非线性结构有限元计算[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1995.
Song Tianxia, Zou Shizhi, Yang Wenbing. Nonlinear structural finite element analysis [M]. Wuhan: Huazhong University of Science Publishing House, 1995. (in Chinese)
- [6] Sansour C. A theory and finite element formulation of shells at finite deformation involving Thickness Change [J]. Arch Appl Mech, 1995(65): 194—216.
- [7] Chen Jiunshyan, Pan Chunhui, Liu Wingkai. Reproducing kernel partial methods for large deformation analysis of non-linear structures [J]. Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996(139): 195—227.
- [8] Foulds L R. Optimization Techniques [M]. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [9] 侯祥林, 刘大任. 杆件结构大变形问题的优化精确算法[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2006, 22(2): 221—223.
Hou Xianglin, Liu Daren. Optimization algorithm of large deformation about truss structure [J]. Journal of Shenyang Jianzhu University (Natural Science), 2006, 22(2): 221—223. (in Chinese)
- [10] 陆念力, 王友海, 孟晓平. 空间桁架单元精确全量平衡方程及切线刚度[J]. 哈尔滨建筑大学学报, 1998, 31(1): 90—94.
Lu Nianli, Wang Youhai, Meng Xiaoping. The accurate total equilibrium equation and tangent stiffness matrix of three — dimensional lattice elements [J]. Journal of Harbin University of C.E & Architecture, 1998, 31(1): 90—94. (in Chinese)

(上接第 42 页)

- [3] 袁骥. 介绍一种常微分边值问题求解通用程序——COLSYS[J]. 计算结构力学及其应用, 1990, 7(2): 104—105.
Yuan Si. Introduction a sort of ordinary differential boundary value problem generalized program solver——COLSYS [J]. Computational Structural Mechanics and Application, 1990, 7(2): 104—105. (in Chinese)
- [4] 袁骥. 有限元线法通用程序——FEMOL92[J]. 计算结构力学及其应用, 1993, 10(1): 118—122.
Yuan Si. Generalized program of Finite Element Method Of Lines——FEMOL92 [J]. Computational Structural Mechanics and Application, 1993, 10(1): 118—122. (in Chinese)
- [5] John H Lienhard I V, John H Lienhard V. A heat transfer textbook [M]. 3rd ed. Massachusetts: Phlogiston Press, 2006.
- [6] Cheung Y K. Finite strip method in structural analysis [M]. New York: Pergamon Press, 1976.
- [7] Brebbia C A. The boundary element method for engineers [M]. London: Pentech Press, 1978.
- [8] Liskovets O A. The method of lines [J]. English translation appeared in Differential Equations, 1965, 7: 1308—1323.
- [9] Ascher U, Christiansen J, Russell R D. COLSYS - A collocation code for boundary value problems [J]. Lecture notes Comp. Sc. 76, Springer Verlag, 1979: 164—185.
- [10] Ascher U, Christiansen J, Russell R D. Collocation Software for Boundary - Value ODES [J]. ACM Trans. Math. Software, 1981, 7(2): 209—222.
- [11] Ascher U, Christiansen J, Russell R D. Algorithm 569, COLSYS: Colocation software for boundary - Value ODEs [J]. ACM Trans. Math. Software, 1981, 7(2): 223—229.
- [12] 孔祥谦. 有限单元法在传热学中的应用[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 1986.
Kong Xiangqian. The application of finite element method in heat transfer theory [M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 1986. (in Chinese)